



Titre: Pré-affectation des tâches aux employés effectuant des tâches non-interruptibles et des activités interruptibles
Title:

Auteur: Jin Jin
Author:

Date: 2009

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Jin, J. (2009). Pré-affectation des tâches aux employés effectuant des tâches non-interruptibles et des activités interruptibles [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/190/>
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/190/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: François Soumis
Advisors:

Programme: Maîtrise en mathématiques appliquées
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

PRÉ-AFFECTATION DES TÂCHES AUX EMPLOYÉS EFFECTUANT DES TÂCHES
NON-INTERRUPTIBLES ET DES ACTIVITÉS INTERRUPTIBLES

JIN JIN

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME
DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

DÉCEMBRE 2009

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

PRÉ-AFFECTATION DES TÂCHES AUX EMPLOYÉS EFFECTUANT DES TÂCHES
NON-INTERRUPTIBLES ET DES ACTIVITÉS INTERRUPTIBLES

présenté par : JIN Jin

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury constitué de :

M. DESAULNIERS Guy, Ph.D., président

M. SOUMIS François, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. HERTZ Alain, Doct. ès Sc., membre

À mes chers parents

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier très sincèrement M. François Soumis, directeur de recherche, pour son support tout au long de ce mémoire et son aide à la correction de mon français dans ce mémoire. Ses connaissances, ses encouragements, sa disponibilité et ses conseils précieux m'ont permis de progresser rapidement.

Je remercie M. Guy Desaulniers pour son aide et d'avoir bien voulu présider mon jury ainsi que M. Alain Hertz d'avoir accepté d'être membre de ce jury.

Je tiens à dire merci à mes parents pour leur appui inconditionnel sans lequel ce mémoire n'aurait pas été possible. Un merci à tous mes amis de Montréal qui m'ont permis de m'amuser franchement quand j'en avais le plus besoin. Merci particulièrement à Kien, qui m'a toujours soutenue au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à ma cousine Jing pour m'avoir encouragée et m'avoir donné la volonté de continuer dans des moments plus sombres.

Enfin, je voudrais exprimer ma gratitude au personnel du GERAD et du département de mathématiques et de génie industriel.

RÉSUMÉ

Ce mémoire est consacré au problème d'affectation des tâches et des activités aux employés. Dans le mémoire, nous supposons que les tâches sont non-interruptibles et les activités sont interruptibles, c'est-à-dire que chaque tâche doit être exécutée continuellement par le même employé, mais les activités peuvent être interrompues. Donc, on peut remplacer un employé par un autre durant l'activité. La durée d'une tâche est beaucoup plus courte que celle d'une activité. Par ailleurs, la demande d'une tâche est un nombre fixé d'employés requis. La demande d'une activité est une courbe variant avec le temps. Cette courbe indique le nombre d'employés requis dans chaque tranche de temps d'une certaine discrétisation de la période considérée. Ce problème constitue le dernier niveau de décision dans le processus d'horaires du personnel.

Nous proposons une nouvelle stratégie en deux phases pour résoudre ce problème. Dans la première phase, nous remplissons les quarts de travail par des tâches et des activités en relaxant certaines des contraintes sur les activités. Ensuite, nous considérons l'affectation des activités aux employés avec les tâches fixées. Trois modèles de base sont proposés pour le problème de la phase 1. L'objectif du premier modèle est de répartir les sur-couvertures d'activités entre les périodes et les activités. Les nouvelles variables pour les employés inactifs sont ajoutées dans le deuxième modèle, et les qualifications des employés inactifs sont maximisées pour avoir plus de flexibilité pour les activités dans la phase 2. Ces qualifications sont réparties en trois morceaux dans le troisième modèle. Certaines extensions sont présentées pour améliorer les modèles de base. Nous discutons le cas où la demande de chaque tâche est d'un ou plusieurs employés, les contraintes de précédence des tâches et le pré-traitement des tâches afin d'éviter les mauvaises affectations.

Les expériences numériques ont été réalisées en deux groupes. Le logiciel d'optimisation Xpress-

Mosel a été utilisé pour résoudre le problème associé à l'affectation des tâches de phase 1. L'horizon de planification du premier groupe est un jour (24 heures). Ces instances sont bien résolues par les trois modèles avec les différents ajustements des paramètres. Les bonnes solutions globales sont obtenues avec des distances inférieures à 0,74% d'une borne inférieure. Le temps total en deux phases est de moins de deux minutes. Les instances du deuxième groupe sont beaucoup plus grosses que celles du premier groupe. Son horizon de planification est de cinq jours, de 50 tâches et de sept activités sont bien affectées aux employés avec les trois modèles. Les solutions obtenues en deux phases nous donnent des distances inférieures à 0,12% d'une borne inférieure. Le temps total pour les deux phases est moins de cinq minutes. La qualité des solutions obtenues par le troisième modèle est la meilleure parmi les trois modèles. Ce troisième modèle réduit les écarts à la borne inférieure de 8% à 13% par rapport au premier modèle.

ABSTRACT

In this thesis, we consider the problem of assigning tasks and activities to employees, which represents the last stage in the personnel scheduling process. We assume in the thesis that tasks are non-interruptible and activities are interruptible. The signification of “non-interruptible” and “interruptible” is that each task should be finished continuously by the same employee(s) without any preemption; however, activities can be interrupted. That is, an employee can be replaced by another one during an activity. The duration of a task is much shorter than that of an activity. Furthermore, the demand of a task is a constant of required employees; whereas the demand of an activity is expressed as a curve which varies with time periods. This curve represents the number of required employees in each of certain discrete time slices in a given period.

We proposed a two-phases method to solve this problem. In the first phase, work shifts are covered by tasks and activities while relaxing certain constraints of the activities. For the next phase, we consider the assignment of activities to employees with the tasks fixed. Three basic models are proposed for the problem of phase 1. The objective of the first model is to distribute the over-covering of activities among time periods and activities. Some new variables are added in the second model for the inactive employees (who are not assigned any work). The objective is to maximize their qualifications (to have more flexibility for activities in phase-2). The qualifications of inactive employees are distributed into three linear segments in the third model. Several extensions are presented to improve the performance of the models. For example, the situations of multiple employees demand for each task, the precedence constraints of tasks, and the pre-treatment of tasks to avoid bad assignments are also discussed in the thesis.

The numerical experiments were performed for two groups. The optimization software Xpress-

Mosel was used to solve the problem of phase 1. The planning horizon of the first group is one day (24 hours). These instances were well solved by the three models with different adjustments of parameters. The global solutions (for 2 phases) present distances less than 0.74% from the lower bound. The total time for 2 phases is less than 2 minutes. The scale of instances in the second group is much larger than that of the first group. Their planning horizon is 5 days, 50 tasks and 7 activities are assigned with the three models. The solutions obtained with 2 phases present distances less than 0.12% from the lower bound. The total time is less than 5 minutes. The quality of solutions of the third model turns out the best among the three models. This third model reduces by 8% to 13% the gap from the lower bound in comparison with the first model.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xiii
LISTE DES FIGURES	xv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : DESCRIPTION DU PROBLÈME	4
1.1 Le problème d'affectation des tâches aux employés effectuant des tâches et des activités	4

	x
1.1.1 Concepts et terminologie	5
1.1.2 Objectifs et restrictions	7
1.1.3 Entrées et sorties	8
1.2 Revue de la littérature	9
1.2.1 Construction des cycles	10
1.2.2 Génération des quarts	10
1.2.3 Affectation des quarts aux employés	12
1.2.4 Affectation des activités aux employés	13
1.2.5 Affectation des tâches aux employés	14
1.3 Contributions	15
CHAPITRE 2 : MODÉLISATION DU PROBLÈME	16
2.1 Hypothèses et notations du problème	17
2.1.1 Hypothèses	17
2.1.2 Notations générales	18

2.2	Stratégie de deux phases	20
2.3	Formulations mathématiques	22
2.3.1	Modèle M_1	23
2.3.2	Fonction de pénalités sur les variables surplus	25
2.3.3	Modèles M_2 et M_3	27
2.4	Tâches nécessitant plus d'un employé	31
2.5	Tâches avec des contraintes de précédence	32
2.6	Tâches réalisées par une équipe	33
CHAPITRE 3 : RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX		35
3.1	Données du problème	36
3.2	Expérimentation	37
3.2.1	Choix des paramètres	38
3.2.2	Pré-traitement des tâches	43
3.3	Utilisation des modèles dans la méthode de deux phases	46

3.3.1	Les problèmes d'une journée	46
3.3.2	Les problèmes de plusieurs jours	50
CONCLUSION		54
BIBLIOGRAPHIE		56

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Les conditions et leurs pénalités	34
Tableau 3.1	Caractéristiques des données du groupe 1	37
Tableau 3.2	Caractéristiques des données du groupe 2	37
Tableau 3.3	Comparaison des paramètres du modèle M_1	38
Tableau 3.4	Comparaison des paramètres du modèle M_2	39
Tableau 3.5	Comparaison des paramètres de M_3	40
Tableau 3.6	Premiers résultats pour le modèle M_1	41
Tableau 3.7	Premiers résultats pour le modèle M_2	42
Tableau 3.8	Premiers résultats pour le modèle M_3	42
Tableau 3.9	Résultats pour le modèle M_1 après modifications	47
Tableau 3.10	Résultats pour le modèle M_2 après modifications	48
Tableau 3.11	Résultats pour le modèle M_3 après modifications	48
Tableau 3.12	Affectation des tâches et des activités (groupe 1)	49

Tableau 3.13 Résultats de la phase 1 pour 50 tâches, trois activités	50
Tableau 3.14 Résultats de la phase 2 pour 50 tâches et trois activités	51
Tableau 3.15 Résultats des trois modèles (groupe 2)	52
Tableau 3.16 Affectation des tâches et des activités (groupe 2)	52

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Exemple d'instance pour cinq quarts de travail	19
Figure 2.2	Le processus d'affectation des tâches et des activités	21
Figure 2.3	Répartition de la sur-couverture : fonction de pénalité	26
Figure 2.4	Un exemple d'instance avec contraintes de précédence	33
Figure 3.1	De mauvaises affectations de tâches	44

INTRODUCTION

Les problèmes d'horaires du personnel sont présents dans de nombreux secteurs (centres d'appels, banques, hôpitaux, service de transport, etc.). Plusieurs entreprises sont actuellement conscientes de l'importance de développer des outils permettant de construire efficacement des horaires d'employés.

Selon la structure du travail, les problèmes d'horaires du personnel se divisent en deux grandes classes. Un type consiste en travail non-interruptible exigeant que l'employé termine tout le travail commencé. À l'opposé, le travail peut être interruptible, c'est-à-dire qu'un employé au travail peut être remplacé par un autre pratiquement à tout moment. Sur la base des recherches antérieures, il y a quatre niveaux de décisions dans le problème des horaires de travail : *la construction des cycles*, *la génération des quarts*, *l'affectation des quarts aux employés* et *l'affectation des activités aux employés*.

La construction des cycles consiste à spécifier les séquences de jours de travail et de repos à affecter aux employés sur un horizon de planification, cyclique ou pas. Dans le deuxième niveau, *la génération des quarts*, un quart de travail est défini par son heure de début, sa durée, la position des pauses et leurs durées. Les durées des quarts peuvent varier d'un employé à l'autre, c'est-à-dire que des employés à temps partiel peuvent avoir des quarts très courts, tandis que des employés à temps régulier peuvent avoir des quarts beaucoup plus longs. De plus, le nombre de pauses, aussi bien que leurs durées, dépendent de la durée du quart. Le troisième niveau, *l'affectation des quarts aux employés*, permet de placer les quarts générés dans les cycles de chaque employé en satisfaisant les préférences des employés autant que possible. Il faut, par exemple, considérer qu'un employé doit avoir un repos suffisant entre deux quarts de travail consécutifs, respecter le temps

de travail minimum et maximum pour chaque employé par semaine, ou par mois, etc. Le dernier niveau, *l'affectation des activités*, consiste à affecter les activités aux employés à l'intérieur des quarts de travail déjà construits en satisfaisant, autant que possible, la demande en personnel pour chaque activité à chaque période du temps. Les problèmes sont regroupés en deux catégories : les problèmes “mono-activité”, où une seule activité est définie et tous les employés sont qualifiés pour cette activité ; les problèmes “multi-activités”, où plusieurs activités sont définies et un employé peut être qualifié pour un sous-ensemble d'activités.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à un problème du dernier niveau mentionné ci-dessus : le problème d'affectation des tâches à des employés effectuant des tâches non-interruptibles et des activités interruptibles. Pour chaque employé, ses jours de travail, les heures de début et de fin de ses quarts de travail sont des informations connues. Précisons maintenant les notions de tâches et d'activités. Il y a généralement deux différences entre elles : les durées et les demandes. Une tâche est spécifiée par un nombre constant de périodes (une ou plusieurs), une fenêtre de temps dans laquelle la tâche doit être commencée, et une demande de la tâche qui est fixée pendant l'exécution (i.e., le nombre d'employés requis pour une tâche). De plus, l'interruption d'une tâche n'est pas permise, c'est-à-dire, une fois qu'un employé commence une tâche, il doit la terminer lui-même sans interrompre son travail. Une activité se caractérise par son heure de début et de fin, la demande est variable en fonction du temps et est décrite par une courbe de demande qui spécifie les nombres d'employés requis durant toutes les périodes du temps dans sa durée. Une activité peut être interrompue et on peut remplacer des personnes aux points de la discrétisation. De plus, il faut aussi considérer les contraintes de durées minimale et maximale du temps de travail d'une personne.

En bref, ce problème est un pré-traitement d'affectation des tâches et des activités aux employés.

Le problème est difficile en considérant les tâches et les activités simultanément. Une stratégie en deux phases est proposée dans ce mémoire : la première phase consiste à placer les tâches dans les quarts de travail en relaxant certaines des contraintes de placement des activités ; la deuxième phase a pour but d'affecter des activités aux employés. Ce mémoire porte sur la première phase, il présente toutefois des résultats complets en utilisant un module pour la deuxième phase développé par un autre étudiant.

Voici un bref aperçu du contenu de ce mémoire. La description détaillée du problème de pré-affectation des tâches aux employés effectuant des tâches et des activités est présentée au premier chapitre. Ensuite, une revue de la littérature est présentée, qui concerne les quatre niveaux de décisions des horaires de travail, et en particulier le problème d'affectation des tâches.

La méthode en deux phases est proposée et expliquée dans le deuxième chapitre, et trois modèles mathématiques sont présentés afin de résoudre le problème de la première phase. Quelques extensions (en incluant les tâches nécessitant plusieurs employés, etc.) sont aussi discutées dans ce chapitre.

Le troisième chapitre décrit les résultats numériques obtenus avec deux groupes d'instances (des petits et des grands problèmes). Les tests ont été réalisés avec le logiciel Xpress-Mosel (2007). Les résultats obtenus confirment que nos trois modèles permettent d'obtenir de bonnes solutions. Des comparaisons entre les trois modèles sont présentées en fin de ce chapitre. Ce mémoire se termine par une brève conclusion.

CHAPITRE 1

DESCRIPTION DU PROBLÈME

Dans ce chapitre, nous allons décrire plus en détail le problème d'affectation des tâches aux employés effectuant des tâches non-interruptibles et des activités interruptibles : le but est d'affecter le travail aux employés en satisfaisant la demande, et en considérant les qualifications des employés.

Tout d'abord, même si le temps est continu, nous travaillons avec une version discrète du problème. L'horizon de planification est divisé en tranches de temps de même durée (on utilise le mot "période de temps-unité" dans ce mémoire). Les problèmes considérés dans ce mémoire ont une période de temps-unité de 15 minutes. Les modèles et les algorithmes proposés pourraient fonctionner avec une autre période de temps-unité. Plus précisément, la demande, le profil de tâches et d'activités, et les pauses du quart de travail sont définis en période de temps-unité. Le présent chapitre est organisé en trois sections. La première section décrit en détail le problème d'affectation des tâches aux employés effectuant des tâches non-interruptibles et des activités interruptibles. Dans la deuxième section, une revue de la littérature et les recherches antérieures sont présentées. Finalement, les contributions de ce mémoire sont présentées dans la dernière section.

1.1 Le problème d'affectation des tâches aux employés effectuant des tâches et des activités

Il y a eu beaucoup de recherches pour résoudre le problème d'affectation des activités aux employés. Cependant, le problème d'affectation des activités et des tâches aux employés est plus

compliqué, et n'a pas encore fait l'objet de beaucoup de recherches. Dans ce mémoire, on propose un processus en deux phases pour augmenter l'efficacité de la résolution. Dans la première phase, les tâches sont affectées aux employés en relaxant certaines contraintes sur les variables d'affectation des activités. Dans la deuxième phase, les activités sont affectées en gardant les tâches fixées. Nous allons regarder ces deux phases en détail dans le chapitre suivant. Le problème que nous allons discuter dans ce mémoire, fait partie de la première phase.

La présente section est organisée en trois sous-sections. La première sous-section présente les concepts et la terminologie du problème. Dans la deuxième sous-section, nous allons numéroter les contraintes et les objectifs du problème. Enfin, les entrées et les sorties des modèles mathématiques sont présentées dans la dernière section.

1.1.1 Concepts et terminologie

Le problème de pré-affectation des tâches aux employés, effectuant des tâche non-interruptibles et des activités interruptibles, consiste à affecter des tâches et des activités aux employés en relaxant certaines contraintes des activités. Avant de décrire ce problème et les modèles mathématiques, on aborde quelques définitions des termes utilisés dans cette sous-section.

1. **Horizon de l'horaire** : Un intervalle du temps dans lequel toutes les tâches doivent être complétées et dans lequel sont incluses les courbes de demandes pour tous les types d'activités.
2. **Période de temps-unité** : L'horizon est divisé en périodes de temps d'égale longueur : cette période est choisie telle que les quarts, les pauses et les tâches soient constitués d'un nombre entier de périodes de temps. De plus, la demande est exprimée en nombre d'employés par

période-unité (par exemple, 15 minutes par période de temps-unité).

3. **Quart** : La spécification détaillée d'un jour du travail assigné à chaque employé. Il existe deux types de quarts : les quarts réguliers qui consistent en un jour de travail complet avec une ou plusieurs pauses ; tandis que, les quarts temps-partiels sont moins longs avec une ou aucune pause. Par ailleurs, la flexibilité des quarts comporte deux facteurs :
 - a.* Les heures de début et les heures de fin des quarts ;
 - b.* Pour chaque pause dans un quart, la durée de la pause est un temps fixé de périodes de temps-unité, et la pause doit débiter dans une fenêtre de pause.
4. **Fenêtre de pause** : L'ensemble des périodes de temps-unité contiguës dans lesquelles la pause peut commencer.
5. **Longueur du quart** : Le nombre total de périodes de temps-unité assignées au travail aussi bien qu'aux pauses pour un quart donné.
6. **Activité** : Une activité peut être étendue à un horizon de l'horaire. L'activité est interruptible telle qu'un employé peut interrompre une activité et la transmettre à un autre employé.
7. **Tâche** : La durée d'une tâche est beaucoup plus petite que la durée d'une activité. D'ailleurs, l'employé qui commence une tâche doit la terminer lui-même sans interrompre son travail.
8. **Demande** :
 - Demande pour une tâche : le nombre requis d'employés durant toute la durée de la tâche.
 - Demande pour une activité : pour chaque type d'activités, il y a un nombre requis d'employés par période de temps-unité. La demande pour une activité est décrite par une courbe de demande.

9. **Fenêtre de début de tâche :** L'intervalle de temps qui est déterminé par l'heure de début au plus tôt et l'heure de début au plus tard pour une tâche.
10. **Sur-couverture d'activité :** Une sur-couverture d'activité est signalée lorsque le nombre d'employés affectés à une activité durant une période de temps-unité est supérieur à la demande en employés.
11. **Sous-couverture d'activité :** Une sous-couverture d'activité est détectée quand le nombre d'employés affectés à une activité durant une période de temps-unité est inférieur à la demande en employés.
12. **Qualifications :** Un employé est qualifié pour une liste de tâches et d'activités. Un employé peut être affecté à un travail seulement si celui-ci appartient à la liste de qualifications.
13. **Contrainte de précédence :** La contrainte de précédence (i, j) entre une tâche i et une autre tâche j exprime le fait que la tâche j ne peut commencer que si la tâche i est terminée.

1.1.2 Objectifs et restrictions

Le problème est défini sur un horizon de l'horaire donné. Cet horizon est divisé en périodes de temps-unité. Les quarts de travail pour chaque employé sont prédéfinis avec leur heure de début et de fin, les heures de début et de fin de pauses. Un ensemble d'activités est donné et, pour chacune d'entre elles, une courbe de demande est définie pendant l'horizon de l'horaire. De plus, un ensemble de tâches est donné. Le problème consiste à satisfaire le mieux possible les demandes en personnel pour chaque tâche et chaque type d'activités à chaque période de temps-unité.

Les objectifs visés sont les suivants :

- minimiser le nombre de sous-couvertures des activités ;
- répartir pondéralement les sur-couvertures entre les activités et les périodes ;
- maximiser le nombre de qualifications des employés inactifs ;
- répartir pondéralement les qualifications des employés inactifs.

La liste des restrictions du problème est la suivante :

- affecter toutes les tâches aux quarts de travail ;
- couvrir autant que possible la demande des activités en employés ;
- chaque employé, durant chaque période où il est présent, travaille sur une seule tâche ou activité ;
- dans certains contextes, on permet que certains employés soient inactifs durant une partie de leur quart de travail.

1.1.3 Entrées et sorties

Trois modèles de base seront proposés dans ce mémoire. Les principales entrées du problème sont :

- les informations sur les quarts de travail ;
- les activités et les informations sur les activités ;

- les tâches et les informations sur les tâches ;
- les demandes des tâches et les courbes de demande des activités en employés ;
- les qualifications des employés ;
- les paramètres de l'utilisateur.

Les sorties du problème sont :

- les quarts de travail remplis de tâches et d'activités ;
- le rapport d'analyse de la solution.

1.2 Revue de la littérature

Le problème auquel nous nous attaquons fait partie du problème d'horaires du personnel, qui comprend quatre niveaux de décisions : *la construction des cycles, la génération des quarts, l'affectation des quarts aux employés et l'affectation des activités aux employés*. Le problème considéré dans ce mémoire est plus précisément un problème d'affectation des activités aux employés comprenant aussi l'affectation des tâches.

Dans cette section, nous présentons une revue de la littérature sur les quatre niveaux de décisions du problème d'horaires du personnel.

1.2.1 Construction des cycles

La construction des cycles détermine quels jours un employé travaillera durant l'horizon de planification. Dans cette étape, les jours de congés et de repos des employés pour un horizon de planification donné sont établis. Pour résoudre le problème de construction des cycles, certains auteurs ont proposé des méthodes différentes. Emmons et Burns (1991) ont présenté un algorithme glouton sur un horizon continu pour des employés avec différents niveaux de qualifications. Les solutions obtenues sont optimales et contiennent des cycles qui permettent d'avoir un nombre suffisant d'employés de chaque niveau de qualifications à tout moment.

Cheang et al. (2003) ont proposé une enquête sur les problèmes de planification des infirmières. Les variables du modèle sont représentées par trois vues des décisions : l'infirmière-jour, l'infirmière-tâche et l'infirmière-quart. Les auteurs ont présenté une approche de résolution — la méta-heuristique de recherche tabou.

1.2.2 Génération des quarts

La génération des quarts consiste à déterminer le temps de début et de fin des quarts de travail et à placer les pauses dans ces quarts. C'est un type de problème sur lequel beaucoup de recherches ont été effectuées. Parmi des différentes méthodes, plusieurs niveaux de souplesse sont représentés. Par exemple, certaines méthodes considèrent une seule pause par quart et d'autres permettent plus d'une pause par quart. De plus, certaines méthodes permettent la flexibilité de début d'une pause ; tandis que d'autres considèrent que le début d'une pause est fixe. Finalement, certaines tiennent compte de pauses de durées variables selon la durée des quarts.

Dantzig (1954) a proposé une première formulation basée sur un modèle qui énumère tous les quarts avec une seule pause. Bechtold et Jacobs (1990) ont proposé un modèle avec des variables implicites. Des variables indiquent le nombre d'employés débutant leurs pauses à chaque période de temps. D'autres variables indiquent le nombre d'employés effectuant chaque quart dont l'heure de pause n'est pas précisée. Ces variables sont reliées par des contraintes "Forward" et "Backward". Avec cette formulation, les auteurs ont pu diminuer le nombre de variables comparé à la formulation de Dantzig. Bechtold et Jacobs (1996) ont prouvé que leur modèle est équivalent au modèle de Dantzig à la condition qu'il n'y ait pas d'extra-chevauchement.

Aykin (1996) a présenté une approche permettant de planifier plusieurs types de pauses par quart et chacun pouvant débiter dans une fenêtre de temps. Le modèle mathématique utilisé est de type programmation linéaire en nombres entiers. Aykin (1998) a proposé un algorithme de Branch-and-Cut pour résoudre la formulation de Aykin (1996). Deux groupes de problèmes sont représentés, où les problèmes du deuxième groupe sont beaucoup plus grands que ceux du premier groupe. Aykin (2000) a démontré que sa méthode obtient plus rapidement des solutions optimales que la formulation de Bechtold et Jacobs (1990). Par les tests, il a conclu que l'utilisation de fenêtres de temps permettait de réduire de 4% à 9% le nombre d'employés requis pour couvrir la demande.

Rekik (2006) a montré que les relaxations linéaires sont équivalentes pour les approches de Bechtold et Jacobs, Aykin, et Dantzig. Elle a généralisé le problème en considérant que la durée journalière de pauses peut être décomposée en plusieurs sous-pauses de durées variables. Elle a ajouté des contraintes d'espacement entre les pauses afin de pouvoir utiliser de plus longues fenêtres de temps. Ceci a permis de réduire le nombre d'employés de 4% à 8% tout en conservant des horaires de qualité. En généralisant les modèles d'Aykin, de Bechtold et Jacobs, Rekik a reformulé les contraintes "Forward" et "Backward" pour réduire la densité de la matrice. Elle a montré que

l'approche de Bechtold et Jacobs est plus rapide que l'approche d'Aykin avec cette reformulation.

1.2.3 Affectation des quarts aux employés

Le troisième niveau de décisions a pour but de déterminer quel employé travaillera à chacun des quarts créés. D'ailleurs, deux quarts appartenant à un même employé doivent être séparés par une durée minimale de repos. L'objectif, lors de cette étape, est de maximiser la satisfaction des employés quant à leur préférence pour les différents types de quarts.

Jarrah et al. (1994) ont présenté un algorithme heuristique sur un horizon non-continu dans un contexte mono-activité. Leur méthode considère divers types de quarts et permet une flexibilité sur les heures de début et les durées des quarts. Les tests ont démontré que l'algorithme présenté permettait d'obtenir des solutions de bonne qualité en des temps raisonnables.

Haase (1999) a présenté un algorithme pour un problème sur un horizon continu (une semaine) pour les commis d'un magasin à rayons. Le problème d'horaires consiste à minimiser les coûts d'exploitation et la sous-couverture des demandes tout en respectant les conventions collectives de travail. Cet algorithme permet de prendre en considération la planification de plusieurs pauses et l'utilisation de fenêtres de temps pour les pauses. Les tests ont été effectués sur 10 instances différentes avec un horizon d'une semaine comprenant 124 périodes.

White et White (2003) ont discuté le problème d'horaires des personnes en équipe. Une équipe est composée de trois à cinq personnes avec différentes compétences. Un algorithme heuristique de recherche taboue est présenté en utilisant une "contrainte logique" pour obtenir des horaires les moins insupportables. Les instances testées indiquent que la qualité des solutions initiales a une

influence marquante sur la solution finale. Ainsi, pour améliorer la qualité de la solution finale, il faudrait améliorer les solutions initiales et associer deux voisinages disjoints en redéfinissant le déplacement pendant la recherche taboue.

1.2.4 Affectation des activités aux employés

La dernière étape considère le problème mono-activité ou multi-activités. Ainsi, à l'intérieur d'un même quart, il est possible d'effectuer un ou plusieurs types d'activités. Dans les contextes où il y a une seule activité, les quarts de travail sont composés de pièces de travail et de pauses. Durant une pièce de travail, l'employé associé au quart est affecté à l'activité. Dans les contextes multi-activités, il faut remplir les quarts de travail avec ces différentes activités de sorte à satisfaire au mieux, pour chaque activité, la demande à chaque période de l'horizon de planification.

Omari (2002) a présenté un algorithme heuristique pour résoudre un problème d'horaires de contrôleurs aériens. La méthode que l'auteur décrit, considère des quarts de travail construits et affectés aux employés, et elle remplit ces quarts d'activités et de pauses. L'objectif du problème est de minimiser la somme des sous-couvertures des demandes associées aux activités, tout en s'assurant que la suite d'activités, qui composent les quarts de chaque employé, respecte les normes de la convention collective. Les tests ont été effectués sur un ensemble de données comprenant un horizon d'un mois, de 85 employés, d'une vingtaine d'activités ainsi qu'une demande pour les activités définie à chaque 15 minutes.

Bouchard (2004) a développé des stratégies d'accélération dans le contexte de la génération de colonnes afin de permettre la génération des pauses à l'intérieur des quarts. L'auteur a ajouté les composantes de construction de quarts dans l'affectation des activités aux employés et d'af-

fection des quarts aux employés. Il a démontré que l'intégration des trois étapes (construction des quarts de travail avec pauses, assignation des quarts aux employés et assignation des activités) permet d'obtenir des solutions de meilleure qualité. Finalement, l'analyse des résultats a indiqué que l'approche proposée peut résoudre ces problèmes en des temps acceptables.

1.2.5 Affectation des tâches aux employés

Porto et Ribeiro (1995) et Porto et al. (2000) ont discuté le problème d'affectation des tâches dans un environnement de multi-processeurs identiques. D'ailleurs, les tâches affectées sont sous des restrictions de précédence. L'objectif du modèle est de minimiser le temps total d'achèvement de l'application. Le problème est résolu par une approche méta-heuristique de recherche taboue où la solution initiale est obtenue par un algorithme glouton. Ils ont montré que, pour la plupart du temps, la méthode de recherche taboue peut atteindre des résultats beaucoup supérieurs en comparaison avec l'algorithme glouton.

Maculan et al. (1999) ont donné une nouvelle formulation mathématique du problème de l'ordonnancement des tâches utilisant des processeurs indépendants sous contraintes que cette formulation a un nombre polynomial de variables, et n'exige pas d'avoir des valeurs entières pour les temps de traitement.

Corominas et al. (2006) ont considéré un problème d'affectation d'une séquence de tâches durant un horizon de travail. Les employés possèdent des multi-compétences et, pour chaque tâche, tous les employés qualifiés ont la même efficacité. Plutôt que de formuler un modèle mathématique, qui aurait été non-linéaire, les auteurs ont proposé une approche résolvant une séquence de problèmes d'affectation pour chacune des périodes de planification. Les résultats obtenus sont

satisfaisants.

1.3 Contributions

Dans ce mémoire, nous présentons trois modèles de base et la comparaison des trois modèles pour résoudre le problème de pré-affectation des tâches aux employés effectuant des tâches non-interruptibles et des activités interruptibles. En proposant l'idée de décomposer le processus d'affectation du travail aux employés, on a réussi à résoudre rapidement le problème d'affectation des activités et des tâches. Plusieurs extensions sont aussi discutées dans ce mémoire.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION DU PROBLÈME

Dans ce chapitre, nous présentons les modèles mathématiques retenus pour le problème décrit au premier chapitre.

Le problème est défini pour un horizon de planification donné, par exemple une semaine. Cet horizon est discrétisé en périodes de même durée, typiquement 15 minutes. Un ensemble de travail (tâches et activités) est donné et, pour chaque tâche, une demande d'employés est fixée ; pour chaque type d'activités, une courbe de demande est définie en fonction de la période de l'horizon de planification. Un ensemble d'employés avec leurs quarts de travail est donné, et pour chaque quart de cet ensemble, on connaît son heure de début et de fin, les heures de début et de fin des pauses qui s'y trouvent et l'employé qui y travaille. Le problème consiste à affecter les tâches et les activités aux employés qualifiés à l'intérieur des quarts de travail déjà construits, en satisfaisant, autant que possible, la demande des employés pour chaque tâche et pour chaque activité à chacune des périodes de la discrétisation.

On propose trois modèles de base dans ce chapitre. La première section décrit les hypothèses et les notations nécessaires pour les modèles de base. Ensuite, la méthode de deux phases est expliquée dans la deuxième section. Dans la dernière section, les formulations mathématiques seront présentées, ainsi que 3 extensions.

2.1 Hypothèses et notations du problème

Les modèles de base proposés dans cette section sont valides pour la version simplifiée du problème d'affectation des tâches aux employés effectuant des tâches et des activités, avec un employé demandé pour chaque tâche. Les situations dans lesquelles les tâches nécessitent plusieurs employés sont présentées dans la section suivante. Dans cette section, quelques hypothèses et des notations nécessaires à la définition du modèle seront énumérées.

2.1.1 Hypothèses

Pour bien comprendre la formulation proposée, plusieurs hypothèses nécessaires sont présentées ci-dessous :

1. toutes les périodes de temps-unité sont de même longueur ;
2. chaque tâche doit être exécutée d'une façon continue, la préemption des tâches n'est pas admissible dans l'horizon de l'horaire ;
3. chacun des employés considérés à un quart connu ;
4. les longueurs des quarts aussi bien que celles des pauses dans les quarts, consistent en de nombres entiers de périodes de temps-unité ;
5. certaines tâches ou certaines activités peuvent être affectées à un employé, seulement s'il est qualifié pour celles-ci et disponible à ce moment ;

6. au niveau des employés qui possèdent le même type de compétences, leurs capacités et leurs productivités sont égales ;
7. chaque employé doit faire au plus une tâche ou une activité en même temps ;
8. pour la situation des tâches nécessitant plus d'un employé, tous les employés affectés à une tâche débutent en même temps et terminent en même temps ;
9. la sur-couverture et la sous-couverture d'activités sont permises.

2.1.2 Notations générales

Un petit exemple d'instance pour cinq quarts de travail est présenté dans la figure 2.1. L'horizon est divisé en périodes de temps-unité, trois tâches (t_1 , t_2 et t_3) avec leurs fenêtres de temps sont à exécuter. Pour l'activité, une courbe de demande d'employés requis est donnée. Il y a cinq différents quarts de travail (les employés e_1, \dots, e_5).

Les notations suivantes sont utilisées pour les formulations mathématiques, et les modèles de base sont présentés ensuite.

- P — l'ensemble des périodes de temps-unité durant l'horizon de l'horaire ; $p \in P$ est une période de temps-unité.
- A — l'ensemble des activités ; les activités sont numérotées de 1 à $|A|$.
- T — l'ensemble des tâches ; les tâches sont numérotées de 1 à $|T|$.

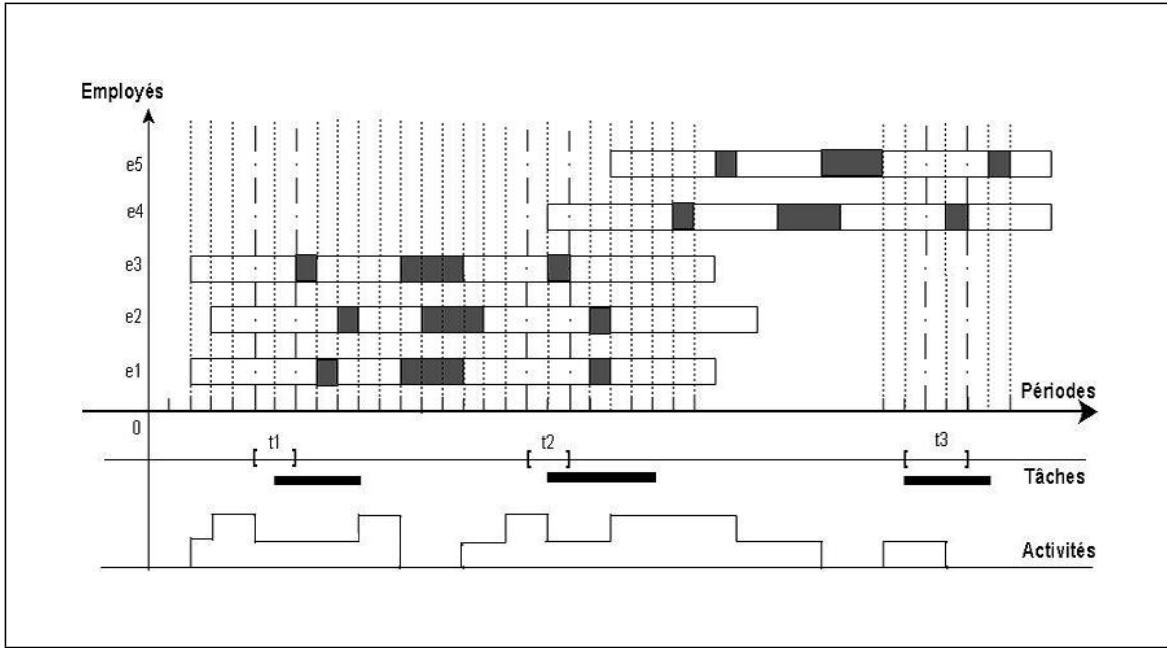


Figure 2.1: Exemple d'instance pour cinq quarts de travail

- E — l'ensemble des employés ; les employés sont numérotés de 1 à $|E|$.
- E_t — l'ensemble des employés qui sont qualifiés pour la tâche $t \in T$.
- E_a — l'ensemble des employés qui sont qualifiés pour l'activité $a \in A$.
- P_e — l'ensemble des périodes durant lesquelles l'employé $e \in E$ travaille.
- $[F_1^t, F_2^t]$ — la fenêtre de temps avec des périodes de temps-unité contiguës dans laquelle la tâche $t \in T$ doit commencer.
- D_t — la durée de la tâche $t \in T$ en périodes de temps-unité contiguës.
- $H_t^p = [p, p + D_t - 1]$ — l'ensemble des périodes de temps-unité pendant lesquelles la tâche $t \in T$ est exécutée si elle débute à la période $p \in [F_1^t, F_2^t]$.

- Q_e^a — paramètre binaire qui vaut 1 si l'employé $e \in E$ est qualifié pour l'activité $a \in A$, et 0 sinon.
- Q_e^t — paramètre binaire qui vaut 1 si l'employé $e \in E$ est qualifié pour la tâche $t \in T$, et 0 sinon.
- R_t — le nombre d'employés requis pour la tâche $t \in T$. Dans les modèles de base, $R_t = 1$.
- R_a^p — le nombre d'employés requis pour l'activité $a \in A$ durant la période de temps-unité $p \in P$.

2.2 Stratégie de deux phases

Affecter simultanément les tâches et les activités aux employés, de façon à satisfaire leur demande, est un problème difficile. Nous proposons dans cette section un processus de deux phases présenté à la figure 2.2 suivante.

La première phase consiste à placer les tâches dans les quarts de travail en relaxant certaines contraintes de placement des activités. En satisfaisant le mieux possible les demandes des tâches, elle vise à maximiser les surplus d'employés exécutant les activités (la sur-couverture) dans chaque période de temps-unité. En même temps, on minimise la sous-couverture des activités dans cette phase.

Lorsque des solutions optimales sont obtenues de la première phase, toutes les tâches doivent être bien affectées aux employés à l'intérieur des quarts de travail. Dans la phase suivante, nous

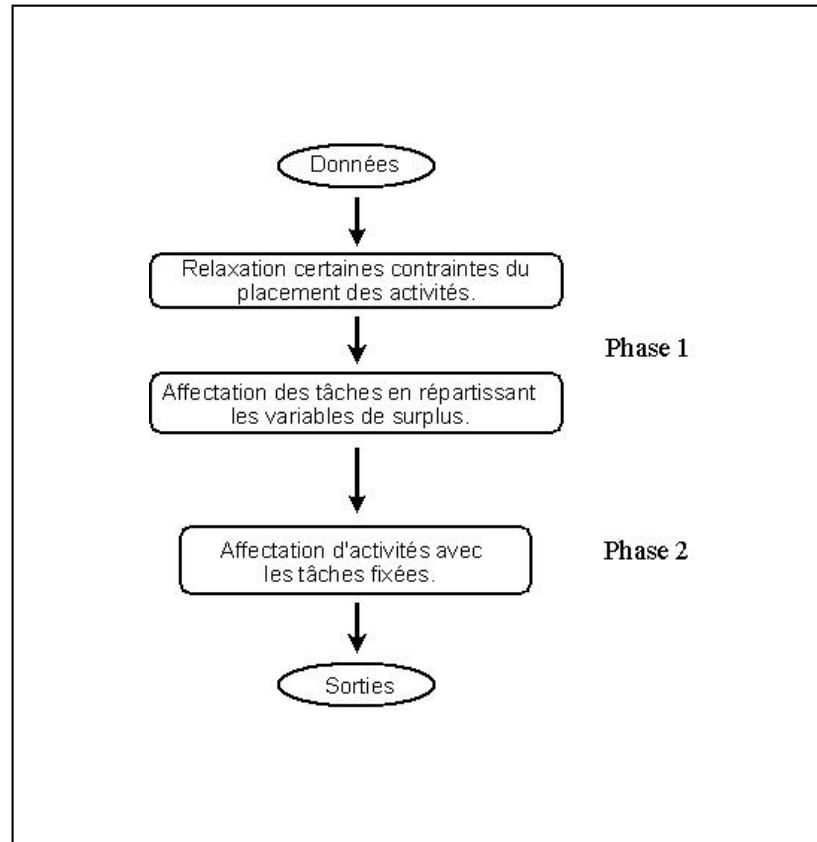


Figure 2.2: Le processus d'affectation des tâches et des activités

résolvons le problème d'affectation des activités aux employés.

Les modèles de base proposés dans cette section sont établis pour la première phase, dans laquelle on veut trouver une solution pour les tâches qui permet une solution ayant la moins extrême possible pour les activités. Ceci donnera de la flexibilité pour obtenir une bonne solution à la deuxième phase.

2.3 Formulations mathématiques

Avant de proposer la formulation mathématique, il importe de signaler les objectifs visés et les restrictions à respecter lors de la résolution du problème. Les objectifs traités dans le modèle de base sont :

- de minimiser le nombre de sur-couvertures des activités ;
- de répartir les sur-couvertures des activités et de trouver une solution à moins extrémiste possible ;
- de maximiser le nombre de qualifications des employés n'ayant pas de travail à une période donnée ;
- de répartir le nombre de qualifications des employés n'ayant pas de travail à une période donnée.

Les contraintes prises en considération dans ce modèle sont :

- d'affecter toutes les tâches aux quarts de travail ;
- de couvrir autant que possible les demandes des activités en employés ;
- que chaque employé, durant chaque période où il est présent, travaille sur une seule tâche ou activité ;
- que dans les modèles M_2 et M_3 , des périodes inactives soient permises pour les employés.

2.3.1 Modèle M_1

Premièrement, on va présenter le premier modèle de base M_1 . Nous définissons tout d'abord les variables dont nous avons besoin dans M_1 . Le modèle fait appel à cinq types de variables :

$\mathbf{X}_{e,t}^p$: Les variables binaires telles que $X_{e,t}^p = 1$, si l'employé $e \in E_t$ débute la tâche $t \in T$ à la période $p \in P_e$. De plus, $X_{e,t}^p$ existe seulement si $H_t^p \subseteq P_e$.

$\mathbf{Y}_{e,a}^p$: Les variables telles que $Y_{e,a}^p \in [0, 1]$ est une fraction de son temps que l'employé $e \in E_a$ consacre à l'activité $a \in A$ durant la période $p \in P_e$.

$s_1^{ap}, s_2^{ap}, s_3^{ap}$: Les variables de surplus pour les sur-couvertures d'activité $a \in A$ durant la période $p \in P$, $s_1^{ap}, s_2^{ap} \in [0, 1]$, et $s_3^{ap} \geq 0$.

s_0^{ap} : Les sous-couvertures d'activité $a \in A$ durant la période $p \in P$, $s_0^{ap} \geq 0$.

s_t : Les variables artificielles telles que $s_t \geq 0$ pour la sous-couverture de la tâche $t \in T$.

Comme indiqué avant, dans les modèles de base, on considère ici le cas où la demande est 1 pour chaque tâche, i.e., $R_t = 1, \forall t \in T$.

Le modèle M_1 est :

$$\textbf{Minimiser} \quad c_1 \sum_{\substack{a \in A \\ p \in P}} s_1^{ap} + c_2 \sum_{\substack{a \in A \\ p \in P}} s_2^{ap} + c_3 \sum_{\substack{a \in A \\ p \in P}} s_3^{ap} + c_0 \sum_{\substack{a \in A \\ p \in P}} s_0^{ap} + M \sum_{t \in T} D_t \cdot s_t \quad (2.1)$$

sujet à :

$$\sum_{p \in [F_1^t, F_2^t]} \sum_{e \in \{e \in E | H_t^p \subseteq P_e\}} Q_e^t \cdot X_{e,t}^p + s_t = 1, \quad \forall t \in T \quad (2.2)$$

$$\sum_{e \in \{e \in E | p \in P_e\}} Q_e^a \cdot Y_{e,a}^p - s_1^{ap} - s_2^{ap} - s_3^{ap} + s_0^{ap} = R_a^p, \quad \forall p \in P, \forall a \in A \quad (2.3)$$

$$\sum_{t \in T} \sum_{\substack{p' \in \{p' \in P | H_t^{p'} \subseteq P_e, \\ p \in H_t^{p'}\}}} Q_e^t \cdot X_{e,t}^{p'} + \sum_{a \in A} Q_e^a \cdot Y_{e,a}^p = 1, \quad \forall e \in E, \forall p \in P_e \quad (2.4)$$

$$X_{e,t}^p \in \{0, 1\}, \quad \forall e \in E_t, \forall p \in P_e \quad (2.5)$$

$$Y_{e,a}^p \in [0, 1], \quad \forall e \in E_a, \forall p \in P_e \quad (2.6)$$

$$0 \leq s_1^{ap}, s_2^{ap} \leq 1, \quad \forall p \in P, \forall a \in A \quad (2.7)$$

$$s_3^{ap}, s_0^{ap} \geq 0, \quad \forall p \in P, \forall a \in A \quad (2.8)$$

$$s_t \geq 0, \quad \forall t \in T \quad (2.9)$$

Dans la fonction objectif (2.1), afin de maximiser le nombre d'employés et de périodes différentes ayant de la sur-couverture, nous définissons des pénalités $c_1 < c_2 < c_3 < 0$ sur les variables de surplus utilisées dans les contraintes (2.3). En même temps, on minimise la sous-couverture d'activité s_0 en ajoutant une pénalité $c_0 \geq 0$. La constante $M > 0$ est un nombre assez grand comparé à la somme des variables artificielles s_t . La première partie de cette fonction objectif est une fonction convexe et linéaire par morceaux qui assure que les surplus se répartissent entre les périodes et les activités. Nous allons discuter cette fonction objectif en détail plus tard. Les contraintes (2.2) assurent un employé pour chaque tâche $t \in T$. Les contraintes (2.3) représentent qu'il faut avoir assez d'employés sur les activités durant chacune des périodes de l'horizon. Les variables de sur-

plus s_1^{ap} , s_2^{ap} , s_3^{ap} permettent de sur-couvrir ces demandes pour les activités. Comparativement, les variables s_0^{ap} correspondent à la sous-couverture sur les activités. De plus, les contraintes (2.4) demandent que chaque employé fasse exactement une tâche ou une activité en même temps. Les contraintes (2.5) et (2.6) imposent que les variables $X_{e,t}^p$ sont binaires et $Y_{e,a}^p$ sont continues entre 0 et 1. Finalement, les contraintes (2.7) — (2.9) restreignent les variables surplus et les variables artificielles.

Remarquons que pour le modèle de base (M_1), nous avons observé que les variables $Y_{e,a}^p$ qui indiquent l'affectation des activités aux employés, étaient binaires même si on permet qu'elles soient fractionnaires. Quand les tâches sont affectées aux employés, l'affectation des activités se divise en problèmes de transport indépendants pour chacune des périodes.

2.3.2 Fonction de pénalités sur les variables surplus

Pour le premier terme de la fonction objectif (2.1) dans (M_1), soit $s^{ap} = s_1^{ap} + s_2^{ap} + s_3^{ap}$, $a \in A, p \in P$. Alors la fonction de pénalité $F(s^{ap})$ est une fonction convexe linéaire par morceaux. La figure 2.3 illustre la forme de cette fonction de pénalité. Les paramètres c_i , où $i = 1, 2, 3$, prennent des valeurs négatives et sont triés en ordre croissant puisque la fonction de pénalité est convexe. En réalité, la fonction de pénalité peut être convexe comme $G(s^{ap})$ dans le graphe. $G(s^{ap})$ est une fonction décroissante, non-linéaire continue, et convexe. La fonction $F(s^{ap})$ est une fonction convexe et linéaire par morceaux qui coïncide avec $G(s^{ap})$ pour s^{ap} entier. En remplaçant s^{ap} par s_1^{ap} , s_2^{ap} et s_3^{ap} , le cas non-linéaire se résout optimalement par programmation linéaire en nombres entiers.

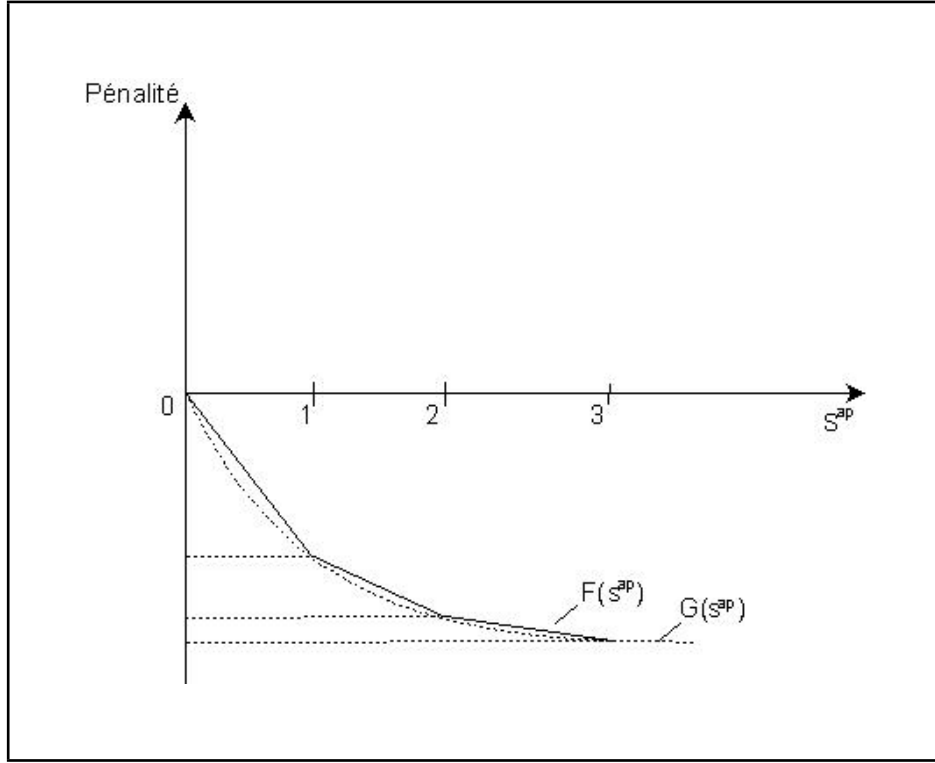


Figure 2.3: Répartition de la sur-couverture : fonction de pénalité

Soit $|P_e|$ le temps (en périodes de temps-unité) de travail de l'employé $e \in E$, il est à rappeler que R_t est la demande pour la tâche $t \in T$, et R_a^p le nombre d'employés requis pour l'activité $a \in A$ durant la période $p \in P$. Alors, on a la relation :

$$\left| \left(\sum_{\substack{a \in A \\ p \in P}} R_a^p + \sum_{t \in T} D_t \cdot R_t \right) - \sum_{e \in E} |P_e| \right| = \left| \sum_{\substack{a \in A \\ p \in P}} s^{ap} - \sum_{\substack{a \in A \\ p \in P}} s_0^{ap} - \sum_{t \in T} D_t \cdot s_t \right| \quad (2.10)$$

Tant que les quarts de travail et la demande (activités et tâches, s'il y a lieu) sont connus, la somme des variables de surplus s^{ap} moins la somme des sous-couvertures s_0^{ap} sont constantes. L'idée de la répartition des sur-couvertures d'activités utilisant une fonction linéaire en trois mor-

ceaux est que, pour mieux affecter les activités à la phase suivante, on préfère plusieurs fois une personne en surplus qu'une fois plusieurs personnes durant chaque période.

2.3.3 Modèles M_2 et M_3

L'idée du modèle M_2 ci-dessous est que nous aimerions garder les employés avec le plus de qualifications pour le processus postérieur d'affectation des activités, c'est-à-dire on veut affecter les employés ayant moins de qualifications aux tâches.

Au lieu de mettre les coûts sur la sur-couverture, on permet aux employés d'avoir des périodes inactives. Dans cette section, on va proposer deux modèles de base en considérant les qualifications pour les activités et les tâches. De plus, on met les coûts sur une variable W_e^p . Cette variable signifie que l'employé e ne travaille pas durant la période p , $p \in P_e$.

À titre d'exemple, considérons une période $p \in P$ où quatre employés sont disponibles pour le travail. On définit tout d'abord qu'il y a quatre types de qualifications : A , B , C et D . Le premier employé possède les qualifications A , B , C et D , le deuxième employé possède B , C et D , le troisième possède A , B et C et le dernier possède seulement C . Il y a une tâche pouvant être exécutée durant p (c'est-à-dire la fenêtre de temps pour cette tâche est $[p - D_t + 1, p]$), qui exige la qualification C (par conséquent, tous les employés peuvent la faire). En même temps, deux activités qui exigent les qualifications A et B respectivement doivent être faites par un seul employé. Alors, la solution d'affecter le dernier employé à la tâche est meilleure que d'autres solutions où un des trois premiers employés est affecté à cette tâche. Donc dans certains contextes, on veut garder les employés ayant le plus de compétences pour l'affectation des activités.

Premièrement, définissons des notations additionnelles :

- Q — l'ensemble des qualifications, on numérote toutes les qualifications d'un problème de 1 à $|Q|$.
- Q_e — le sous-ensemble de Q , contenant les compétences de l'employé e , $e \in E$.

De plus, pour présenter le modèle M_2 , on définit de nouvelles variables binaires W_e^p telles que :

$$W_e^p = \begin{cases} 1, & \text{si l'employé } e \text{ ne travaille pas durant la période } p, p \in P_e \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient le modèle M_2 en modifiant le modèle de base M_1 . La fonction objectif de M_2 est :

$$\text{Minimiser} \quad - \sum_{e \in E, p \in P} |Q_e| \cdot W_e^p + c_0 \sum_{\substack{a \in A \\ p \in P}} s_0^{ap} + M \sum_{t \in T} D_t \cdot s_t \quad (2.11)$$

Le premier terme de la fonction objectif (2.11) maximise la somme des qualifications apportées par les variables supplémentaires W_e^p utilisées dans les contraintes (2.13).

Les contraintes (2.3) et les contraintes (2.4) dans M_1 sont remplacées par :

$$\sum_{e \in \{e \in E | p \in P_e\}} Q_e^a \cdot Y_{e,a}^p + s_0^{ap} = R_a^p, \quad \forall p \in P, \forall a \in A \quad (2.12)$$

$$\sum_{t \in T} \sum_{\substack{p' \in \{p' \in P | H_t^{p'} \subseteq P_e, \\ p \in H_t^{p'}\}}} Q_e^t \cdot X_{e,t}^{p'} + \sum_{a \in A} Q_e^a \cdot Y_{e,a}^p + W_e^p = 1, \quad \forall e \in E, \forall p \in P_e \quad (2.13)$$

Dans les contraintes (2.12), on enlève les variables de surplus s_1^{ap} , s_2^{ap} et s_3^{ap} parce que la surcouverture des activités dans le modèle M_2 est représentée par le nombre d'employés inactifs durant leurs quarts de travail. Les contraintes (2.13) indiquent que, durant la période p où l'employé $e \in E$ est dans son quart de travail, il doit faire au plus une tâche ou une activité en même temps. D'ailleurs, on permet de ne pas travailler dans son quart de travail.

Finalement, nous ajoutons les contraintes (2.14) pour restreindre les variables W_e^p :

$$W_e^p \in \{0, 1\}, \quad \forall p \in P, \forall e \in E \quad (2.14)$$

Dans le deuxième modèle, en affectant toutes les tâches aux employés, nous gardons les employés ayant le plus possible de qualifications. Avec l'idée similaire de répartir les sur-couvertures d'activités de M_1 , on répartit ces employés entre les périodes et les activités dans le troisième modèle de base M_3 . Tout d'abord, nous définissons les variables de surplus additionnelles dans ce modèle.

$\mathbf{r}_1^{\text{ap}}, \mathbf{r}_2^{\text{ap}}, \mathbf{r}_3^{\text{ap}}$: Les variables de surplus d'activité $a \in A$ durant la période $p \in P$, $r_1^{ap}, r_2^{ap} \in$

$[0, 1]$, et $r_3^{ap} \geq 0$.

Alors la fonction objectif du modèle M_3 est :

$$\text{Minimiser} \quad c_1 \sum_{\substack{a \in A \\ p \in P}} r_1^{ap} + c_2 \sum_{\substack{a \in A \\ p \in P}} r_2^{ap} + c_3 \sum_{\substack{a \in A \\ p \in P}} r_3^{ap} + c_0 \sum_{\substack{a \in A, \\ p \in P}} s_0^{ap} + M \sum_{t \in T} D_t \cdot s_t \quad (2.15)$$

Aux contraintes du modèle M_2 , nous ajoutons des contraintes (2.16) comme ci-dessous :

$$\sum_{e \in E} Q_e^a \cdot W_e^p - r_1^{ap} - r_2^{ap} - r_3^{ap} = 0, \quad \forall a \in A, \forall p \in P \quad (2.16)$$

La fonction objectif (2.15) est formée par deux termes. Dans le premier terme, afin de maximiser la répartition entre les périodes et les employés inactifs dans leurs quarts, nous prenons les paramètres $c_1 < c_2 < c_3 < 0$. Dans le deuxième terme, on minimise la sous-couverture d'activités avec $c_0 > 0$, et on met un très grand $M > 0$ pour les variables artificielles s_t . Les contraintes (2.16) répartissent les qualifications des employés inactifs entre les variable r_1^{ap} , r_2^{ap} , et r_3^{ap} .

Finalement, nous ajoutons les restrictions sur les variables r_1^{ap} , r_2^{ap} , et r_3^{ap} :

$$0 \leq r_1^{ap}, r_2^{ap} \leq 1, \quad \forall p \in P, \forall a \in A \quad (2.17)$$

$$r_3^{ap}, s_0^{ap} \geq 0, \quad \forall p \in P, \forall a \in A \quad (2.18)$$

2.4 Tâches nécessitant plus d'un employé

Pour les modèles de base, chaque tâche nécessite seulement un employé. Cependant, dans certains contextes, une tâche doit être exécutée par plusieurs employés. Dans cette section, nous considérons l'extension où la demande de chaque tâche est plus d'un employé, c'est-à-dire, $R_t \geq 1$, $\forall t \in T$.

Avant de présenter la formulation mathématique, nous définissons les variables binaires additionnelles Z_t^p telles que, $\forall p \in P, \forall t \in T$:

$$Z_t^p = \begin{cases} 1, & \text{si la tâche } t \text{ débute à la période de temps-unité } p \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, les contraintes (2.2) dans les modèles de base M_1 — M_3 sont remplacées par les contraintes suivantes :

$$\sum_{e \in \{e \in E \mid H_t^p \subseteq P_e\}} Q_e^t \cdot X_{e,t}^p + s_t = Z_t^p \cdot R_t, \quad \forall t \in T, \forall p \in [F_1^t, F_2^t] \quad (2.19)$$

$$\sum_{p \in [F_1^t, F_2^t]} Z_t^p = 1, \quad \forall t \in T \quad (2.20)$$

Les contraintes (2.19) ont pour but d'assurer la couverture de la demande de chaque tâche. Les contraintes (2.20) exigent que chaque tâche commence une seule fois.

2.5 Tâches avec des contraintes de précédence

Porto et Ribeiro (1995) et Porto et al. (2000) ont discuté le problème d'ordonnancer un ensemble de tâches soumis à des contraintes temporelles de type inégalités de potentiels, en minimisant le temps de fin de l'ordonnancement. Une condition nécessaire et suffisante, pour qu'il existe une solution à ce problème, est que le graphe potentiels-tâches ne possède pas de circuit. Dans cette section, nous considérons des contraintes de précédence entre les tâches. Tout d'abord, pour que l'écriture soit plus simple, nous supposons que tous les employés peuvent exécuter chacune des tâches, et les employés possèdent la même efficacité pour chaque tâche. Soit le graphe orienté $G = (T, A)$, où les nœuds de T représentent les tâches, les arcs représentent les relations d'ordre partiel sur l'ensemble des tâches, i.e, pour deux tâches i et $j \in T$, l'arc $i \rightarrow j$ existe quand la tâche i doit précéder la tâche j .

La figure 2.4 représente une instance simple de cette situation.

Pour le graphe orienté $G = (T, A)$, chaque noeud de T indique la tâche avec sa durée d'exécution. Les arcs de A indiquent les relations de précédence telles que $(i, j) \in A$ si la tâche $i \in T$ est une tâche précédente de la tâche $j \in T$. Ainsi, les contraintes pour les tâches dans les modèles sont :

$$\sum_{e \in \{e \in E | H_i^p \subseteq P_e\}} X_{e,i}^p \leq \sum_{e \in \{e \in E | H_j^p \subseteq P_e\}} \sum_{p' \geq p + D_i} X_{e,j}^{p'}, \quad \forall p \in P, \forall (i, j) \in A \quad (2.21)$$

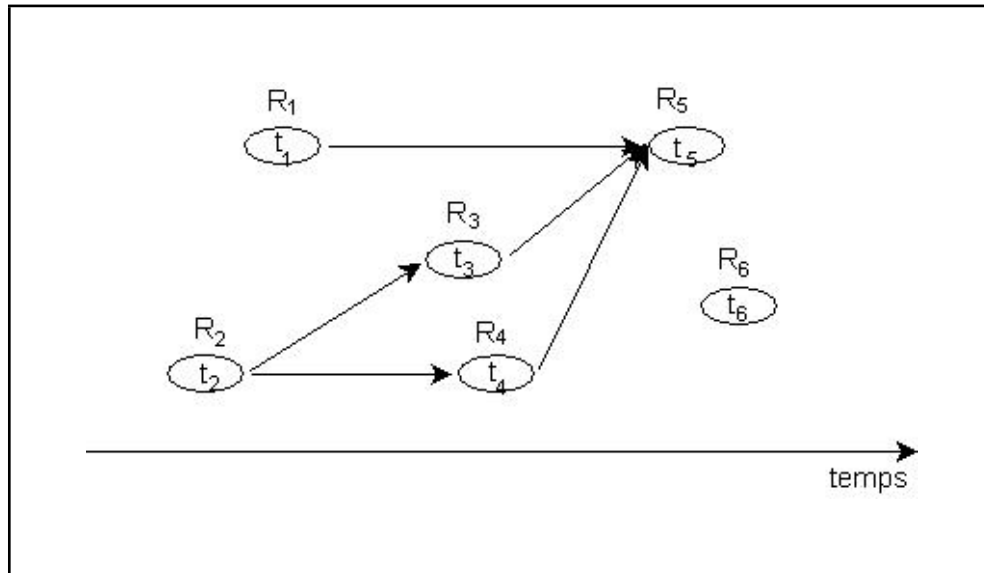


Figure 2.4: Un exemple d'instance avec contraintes de précedence

Les contraintes (2.21) sont des contraintes de précedence qui indiquent que la tâche ne peut commencer que lorsque tous ses prédécesseurs sont finis.

2.6 Tâches réalisées par une équipe

Les multi-qualifications pour les tâches et les activités sont considérées dans les modèles de base. Mais dans quelques contextes, certaines combinaisons de qualifications sont nécessaires afin d'accomplir une tâche. Considérons l'exemple du travail à l'hôpital. Les employés sont classifiés d'après leurs qualifications hiérarchiques : l'infirmière en chef, les infirmières et les étudiantes. Une équipe idéale est composée par une infirmière en chef, deux infirmières et deux étudiantes. Cependant, selon l'article de White et White (2003), cette situation idéale n'est pas toujours atteinte. Souvent, une équipe est composée par une infirmière en chef (essentiel) et soit deux infirmières et une étudiante, soit une infirmière et deux étudiantes.

Une stratégie de “Pénalités classifiées” est proposée dans cette sous-section. Tout d’abord, nous numérotions toutes les combinaisons réalisables des employés avec leurs qualifications hiérarchiques. Ensuite, les pénalités classifiées (de 0 à 100) sont ajoutées telles que, pour la meilleure situation, la pénalité est égale à 0 ; pour la pire situation, où il y a une infirmière en chef, aucune infirmière et deux étudiantes, la pénalité est égale à 100. Ces conditions et leurs pénalités sont présentées dans le tableau 2.1.

Table 2.1: Les conditions et leurs pénalités

<i>Conditions</i>	<i>Pénalités</i>
Une infirmière en chef, deux infirmières, deux étudiantes	0
Une étudiante en moins	5
Une étudiante remplace une infirmière en moins	10
Deux étudiantes en moins	15
...	...
Deux infirmières en moins	100
Les autres cas	500

Pour le problème d’affectation des tâches et des activités, soit un sous-ensemble des tâches dans lequel plusieurs qualifications sont exigées pour finir chacune des tâches, soit C_t est l’ensemble des combinaisons réalisables des qualifications pour exécuter la tâche t , alors $\forall c_t^i \in C_t$, il y a une pénalité ρ_t^i . Ainsi, l’objectif pour cette partie est maintenant de minimiser la somme de pénalités plutôt que de couvrir les tâches avec les employés.

CHAPITRE 3

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Afin de valider la méthodologie de résolution du problème d'affectation des tâches aux employés effectuant des activités et des tâches, nous présentons les résultats des expériences numériques réalisées dans ce chapitre. Dans le deuxième chapitre, il est à rappeler que nous avons proposé trois modèles de base, avec les instances qu'on utilise dans ce chapitre, nous allons discuter leurs avantages aussi bien que leurs désavantages. Par ailleurs, on va comparer les trois modèles de base. La façon de résoudre le problème utilise un processus de deux phases (voir la méthode de deux phases dans la section 2.2). Dans la première phase, nous utilisons un des trois modèles du deuxième chapitre pour affecter des tâches et des activités en relaxant certaines contraintes de placement des activités. En gardant les solutions optimales dans la phase suivante, nous allons utiliser le module développé par l'étudiant Lequy de l'École Polytechnique de Montréal, dans lequel seulement les activités sont considérées. Finalement, nous comparerons les résultats obtenus.

Le logiciel d'optimisation Xpress-Mosel a été utilisé pour résoudre les problèmes de programmation linéaire en nombres entiers utilisés pour affecter toutes les tâches. Les tests présentés dans ce chapitre ont été réalisés sur un ordinateur openSUSE 11.1 (x86_64) (en utilisant un processeur de 2.83GHz de fréquence).

Le présent chapitre est organisé en trois sections. La première section explique les données utilisées pour les tests. Les résultats sont présentés dans la deuxième section. D'ailleurs, un pré-traitement des tâches est discuté dans cette section. Dans la dernière section, l'utilisation des mo-

dèles dans la méthode de deux phases avec les résultats de deux groupes d’instances testées est présentée.

3.1 Données du problème

Les modèles de base au chapitre 2, ont été appliqués à un problème d’horaire du personnel. Nous avons créé deux groupes de données (voir les tableaux 3.1 et 3.2). Il est à noter que, pour toutes les instances mentionnées, l’horizon d’optimisation est discrétisé en périodes de 15 minutes. L’horizon de travail du premier groupe est un jour (24 heures), alors que cet horizon est augmenté à cinq jours (une semaine) pour le deuxième groupe.

Le tableau 3.1 illustre les caractéristiques des 10 instances sur un jour. Dans ce tableau, la première rangée correspond à l’horizon de travail sous la forme du nombre de périodes de temps-unité. La rangée *Nombre d’employés(quarts)* correspond au nombre total d’employés travaillant durant l’horizon de travail. Pour nos problèmes, le nombre d’employés et le nombre de quarts de travail sont identifiés. Les rangées *Nombre d’activités* et *Nombre de tâches* indiquent le nombre total d’activités et le nombre total de tâches à exécuter. La rangée *Nombre de demandes(total)* correspond à la somme des demandes de tâches et d’activités. Ce nombre est la moyenne des demandes des 10 instances.

Après avoir obtenu les solutions optimales des 10 instances du tableau 3.1 et ajusté les paramètres des modèles de base, nous testons de plus grands problèmes de planification. Les caractéristiques des données du deuxième groupe sont présentées au tableau 3.2.

Table 3.1: Caractéristiques des données du groupe 1

Horizon de travail	96
Nombre d'employés(quarts)	51
Nombre d'activités	10
Nombre de tâches	5
Nombre de demandes(total)	26675

Table 3.2: Caractéristiques des données du groupe 2

Horizon de travail	480
Nombre d'employés(quarts)	50
Nombre d'activités	7
Nombre de tâches	50
Nombre de demandes(total)	121215

3.2 Expérimentation

Dans les sous-sections suivantes, plusieurs tableaux seront présentés pour décrire les résultats obtenus. À l'intérieur de ces tableaux, on retrouve les informations suivantes : *Sur* (la surcouverture d'activités) qui est répartie en trois morceaux $\sum s_1^{ap}$, $\sum s_2^{ap}$ et $\sum s_3^{ap}$, *Sous* (la souscouverture d'activités), la répartition du nombre de périodes pour les employés inactifs avec leurs qualifications $\sum r_1^{ap}$, $\sum r_2^{ap}$ et $\sum r_3^{ap}$, *Obj.* (la valeur de la fonction objectif), et *Libre* (le nombre de périodes de temps-unité d'inactivité pour les employés).

3.2.1 Choix des paramètres

Remarquons que des solutions différentes sont obtenues quand on modifie les paramètres des trois modèles de base. Afin d'obtenir les meilleures solutions pour réaliser la phase d'affectation des activités aux employés, nous avons premièrement ajusté les paramètres des modèles.

La sur-couverture et la sous-couverture dans M_1

Pour l'objectif du modèle M_1 dans le deuxième chapitre, les paramètres c_1 , c_2 , c_3 et c_0 sont les pénalités des sur-couvertures et de la sous-couverture d'activités. Des choix différents des paramètres nous donnent des solutions différentes.

Prenons premièrement $c_0 = 20, 50, 100$, en fixant $c_1 = -20$, $c_2 = -10$ et $c_3 = -1$. Les résultats numériques de la résolution selon les instances du premier groupe, sont identifiés dans le tableau 3.3.

Table 3.3: Comparaison des paramètres du modèle M_1

c_0	Obj.	Sur			Sous
		$\sum s_1^{ap}$	$\sum s_2^{ap}$	$\sum s_3^{ap}$	
20	-600	160	0	0	130
50	-540	32	0	0	2
100	-440	32	0	0	2

Lors des expériences numériques, nous avons observé que la valeur de la fonction objectif augmente peu à peu avec l'augmentation de c_0 . D'ailleurs, les sur-couvertures d'activités et la sous-couverture d'activités se réduisent fortement. Pour c_0 plus grand que 50, les valeurs des sur-

couvertures et de la sous-couverture ne varient plus. Ainsi, pour le modèle M_1 , on fixe le paramètre $c_0 = 50$. Pour les autres paramètres où $c_1 = -20$, $c_2 = -10$, et $c_3 = -1$, nous observons que c_2 et c_3 sont suffisamment grands par rapport à c_1 car la sur-couverture est répartie entre les activités et les périodes. Il n'y a plus d'une sur-couverture à la même place ($\sum s_2^{ap} = \sum s_3^{ap} = 0$). La sous-couverture minimum a été atteinte. C'est le but visé.

Les paramètres dans M_2

Pour l'objectif du modèle M_2 , on veut maximiser la somme des qualifications apportées par les employés inactifs. Comme pour chaque employé, le paramètre $|Q_e|$ (le nombre de qualifications possédées par cet employé) est une constante. Conséquemment, le seul paramètre à ajuster pour le modèle M_2 est c_0 . Le tableau 3.4 décrit les résultats numériques qu'on a obtenus.

Table 3.4: Comparaison des paramètres du modèle M_2

c_0	Obj.	Sous	Libre
10	-296	5	35
20	-276	2	32
50	-216	2	32

Dans le tableau 3.4, nous avons observé que la valeur de la fonction objectif augmente et que la sous-couverture d'activité et le nombre de périodes pour les employés inactifs diminuent avec l'augmentation de c_0 . Pour c_0 plus grand que 20, les valeurs de *Sous* et *Libre* ne varient plus. La sous-couverture minimum a été atteinte. Par conséquent, nous fixons $c_0 = 20$.

Les paramètres dans M_3

L'objectif du modèle M_3 a une forme semblable à celui du modèle M_1 . Nous fixons tout d'abord les paramètres $c_1 = -20$, $c_2 = -10$ et $c_3 = -1$ et faisons varier le paramètre c_0 . Le tableau 3.5 nous donne les résultats numériques en ajustant c_0 .

Table 3.5: Comparaison des paramètres de M_3

c_0	Obj.	$\sum r_1^{ap}$	$\sum r_2^{ap}$	$\sum r_3^{ap}$	Sous	Libre
20	-19136	827	767	186	263	293
100	-7220	660	22	0	62	92
200	-5860	340	6	0	5	35
400	-5650	320	6	0	3	33
500	-5260	310	6	0	2	32
600	-5036	310	6	0	2	32

Après la comparaison des choix de paramètres pour le modèle M_3 , nous avons observé que la répartition du nombre de périodes pour les employés inactifs avec leurs qualifications ($\sum r_1^{ap}$, $\sum r_2^{ap}$ et $\sum r_3^{ap}$), la valeur de sous-couverture et la valeur du nombre de périodes d'employés inactifs ne varient plus après $c_0 = 500$. Ainsi, nous fixons le paramètre $c_0 = 500$. Pour les paramètres $c_1 = -20$, $c_2 = -10$, et $c_3 = -1$, c_2 et c_3 sont assez grands par rapport à c_1 ($\sum r_2^{ap}$ atteint son minimum, et $\sum r_3^{ap} = 0$).

Les résultats numériques de la résolution, selon les modèles M_1 , M_2 et M_3 sont présentés aux tableaux 3.6, 3.7 et 3.8. L'horizon de planification des 10 instances testées est un jour (voir le tableau 3.1). Chaque tableau est composé des colonnes : *Affect_tâche : période ; employé* (l'affectation d'une série de tâches t_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) aux employés, où *période* indique la période de temps-unité, et *employé* indique l'employé qui exécute la tâche), $\sum s_1^{ap}$ (la somme du premier morceau de la répartition des sur-couvertures pour les activités), *Sous* (la somme de sous-couverture d'activi-

tés), *Obj.* (la valeur de la fonction objectif), *Contr* (le nombre de contraintes), *Libre* (le nombre de périodes d'inactivité des employés), et $\sum r_1^{ap}$ (la somme du premier morceau de la répartition des périodes dont les employés inactifs avec leurs qualifications dans le modèle M_3).

Table 3.6: Premiers résultats pour le modèle M_1

Instance	Affectation tâche : période ; employé					$\sum s_1^{ap}$	Sous	Obj.	Contr
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5				
1	4;39	14;30	55;12	69;4	78;31	37	5	-490	2738
2	4;23	14;5	55;51	69;18	78;2	34	2	-580	2745
3	4;34	14;25	55;11	69;33	78;30	34	3	-530	2733
4	4;3	14;30	55;21	69;37	78;14	34	2	-580	2727
5	4;32	14;51	55;4	69;35	78;9	35	3	-550	2750
6	4;10	14;5	55;28	69;12	78;14	33	2	-560	2736
7	4;8	14;13	55;21	69;38	38;12	35	3	-550	2753
8	4;11	14;9	55;46	69;4	78;2	35	3	-550	2743
9	4;34	14;34	55;49	69;11	78;2	37	2	-640	2742
10	6;34	14;33	55;17	69;47	78;2	32	2	-540	2751
	Moyenne					34.6	2.7	-557	2741.8

Selon les résultats mentionnés dans les tableaux 3.6, 3.7 et 3.8, chaque instance a été bien résolue par les trois modèles de base. Toutes les tâches sont affectées aux employés qualifiés. Par ailleurs, comme on a déjà discuté dans cette section, pour toutes les instances du tableau 3.6, il n'y a pas plus d'une sur-couverture d'activité affectée sur activité et période ($\sum s_2^{ap} = \sum s_3^{ap} = 0$). Même dans le tableau 3.8, la somme du deuxième ou troisième morceau de la répartition des employés avec leurs qualifications ($\sum r_2^{ap}$ et $\sum r_3^{ap}$) atteint son minimum. À cause de la taille des instances du premier groupe, chacun des trois modèles a de 2,000 à 4,000 contraintes (*Contr*). Le temps de résolution est peu élevé (moins d'une seconde).

Toutefois, les affectations des tâches ne sont pas toutes satisfaisantes pour le problème d'af-

Table 3.7: Premiers résultats pour le modèle M_2

Instance	Affec_tâche : période ; employé					Sous	Libre	Obj.	Contr
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5				
1	4;8	14;27	55;36	69;20	78;38	5	37	-266	2622
2	4;4	14;43	55;3	69;49	78;26	2	34	-300	2641
3	4;42	14;25	55;29	69;32	78;15	3	34	-272	2632
4	4;3	14;29	55;25	69;27	78;45	2	34	-296	2563
5	4;32	14;32	55;28	69;46	78;7	3	35	-286	2638
6	4;5	14;33	55;44	69;46	78;46	2	33	-290	2629
7	4;37	14;44	55;5	69;36	38;45	3	35	-290	2595
8	4;3	14;30	55;18	69;1	78;2	3	35	-286	2636
9	4;10	14;23	55;45	69;24	78;49	2	37	-326	2622
10	4;26	14;37	55;18	69;5	78;5	2	32	-276	2616
Moyenne						2.7	34.6	-288.8	2619.4

Table 3.8: Premiers résultats pour le modèle M_3

Instance	Affec_tâche : période ; employé					Libre	$\sum r_1^{ap}$	Sous	Obj.	Contr
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5					
1	4;8	14;16	55;26	69;3	78;1	37	366	5	-4760	3582
2	4;4	14;10	55;31	69;47	78;26	34	340	2	-5800	3601
3	4;42	14;20	55;28	69;48	78;30	34	332	3	-5140	3592
4	4;3	14;16	55;21	69;37	78;51	34	336	2	-5660	3523
5	4;32	14;32	55;22	69;46	78;33	35	346	3	-5420	3598
6	4;5	14;5	55;47	69;28	78;14	33	330	2	-5600	3589
7	4;37	14;23	55;32	69;21	38;13	35	350	3	-5500	3555
8	4;3	14;30	55;26	69;1	78;2	35	346	3	-5360	3596
9	4;10	14;23	55;15	69;11	78;38	37	366	2	-6320	3582
10	4;26	14;27	55;38	69;17	78;5	32	316	2	-5260	3576
Moyenne						34.6	342.8	2.7	-5482	3579.4

fection des activités, car elles causent des pertes de temps. Donc, en affectant des tâches à une certaine pièce du quart de travail, il existe des trous qui ne permettent pas l'autre affectation du travail. Pour améliorer les modèles et obtenir des solutions plus satisfaisantes, on va identifier les causes des pertes de temps et proposer un pré-traitement pour les tâches dans la section suivante.

3.2.2 Pré-traitement des tâches

Selon les tableaux 3.6, 3.7 et 3.8, nous constatons qu'il existe des mauvais cas dans les trois modèles. À titre d'exemple, pour la deuxième instance du tableau 3.6, nous affectons la tâche t_1 à l'employé e_{23} durant la période p_4 . Mais le temps de début du quart de travail pour cet employé est p_3 . Ainsi, en plaçant la tâche t_1 à la période p_4 , on perd une période de temps qui est trop courte pour affecter d'autre travail. Dans cette sous-section, on ajoute des contraintes sur les modèles pour enlever ces mauvaises affectations des tâches.

Dans la figure 3.1, on pourrait trouver deux types de tâches qui ne sont pas bien affectées. Une tâche est mal affectée si, après l'avoir affectée à un quart de travail, cet employé n'est plus capable d'exécuter d'autres activités ou tâches durant certaines périodes. Par exemple, la tâche 1 commence à partir de 8h15, alors il existe un trou de 15 minutes entre 8h00 et 8h15 durant lequel on ne peut affecter aucun travail. D'ailleurs, si on place la tâche 2 et la tâche 3 dans cette pièce, telles qu'illustrées dans la figure 3.1, il reste 15 minutes entre les deux tâches où on ne peut affecter aucun de travail.

Les deux types de mauvaises affectations de tâches sont :

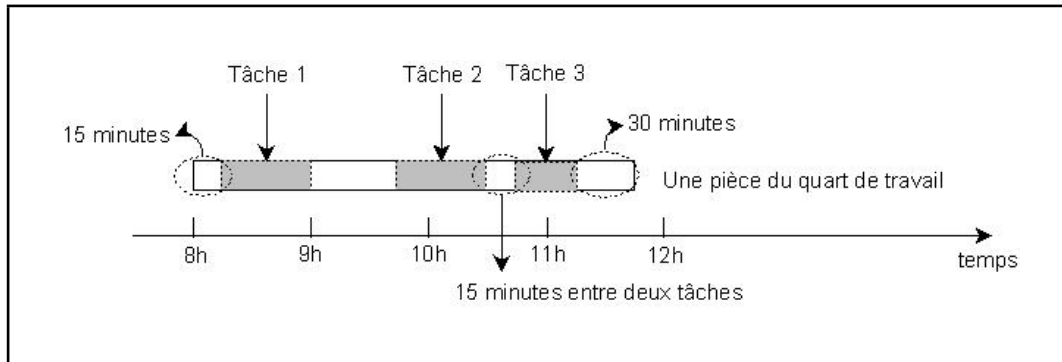


Figure 3.1: De mauvaises affectations de tâches

- pour une pièce du quart de travail, il y a un trou à une extrémité qui est plus petit que la durée minimum d'une activité (i.e. 30 minutes) ;
- s'il y a plus qu'une tâche affectée dans une pièce du quart de travail, l'intervalle entre les deux tâches est plus petit que la durée minimum d'une activité.

Si on fait de mauvaises affectations de tâches, il y aura des difficultés pour la phase suivante d'affectations des activités. L'idée de pré-traitement des tâches est d'enlever les variables correspondant à ces mauvaises affectations.

Nous allons modifier les modèles de base pour éviter les mauvaises affectations de tâches et obtenir des solutions réalisables pour les activités. Les modifications sont :

- enlever les variables $X_{e,t}^p$ qui sont trop proches d'une extrémité d'une pièce d'un quart de travail. Une tâche est trop proche si, en la plaçant à cette position, on laisse un trou plus court que la durée minimum d'une activité ;
- ajouter des contraintes pour éviter un intervalle entre deux tâches plus petit que le temps minimum d'une activité.

Premièrement, nous définissons les notations additionnelles :

- K_e — l'ensemble de pièces pour chaque quart de travail ;
- P_e^k — le sous-ensemble de périodes de temps-unité tel que l'employé $e \in E$ travaille dans la pièce $k \in K_e$;
- Δ_a — la durée minimum de l'activité $a \in A$. Pour toutes les activité exécutées, on définit une constante δ tel que $\delta = \min\{\Delta_a | \forall a \in A\}$.

Avec les notations ci-dessus, nous ajoutons les contraintes (3.1) aux modèles (M_1) , (M_2) et (M_3) du deuxième chapitre :

$$\sum_{\substack{t \in \{t \in T | H_t^p \subseteq P_e, \\ p - D_t + 1 \in [F_1^t, F_2^t]\}}} X_{e,t}^{p-D_t+1} + \sum_{p' \in [p, p+\delta-1]} \sum_{\substack{t \in \{t \in T | p' \in [F_1^t, F_2^t], \\ H_t^{p'} \subseteq P_e\}}} X_{e,t}^{p'} \leq 1, \forall p \in P_e^k, \forall k \in K_e, \forall e \in E \quad (3.1)$$

Les contraintes (3.1) indiquent que s'il y a des tâches terminant à la période p , les autres tâches ne peuvent commencer avant la période $p + \delta$. Remarquons que ces contraintes peuvent être nombreuses et compliquées (en considérant des périodes et des pièces de quarts de travail). Quand il y a peu de tâches ou que les tâches sont assez longues pour les pièces de travail, il est peu intéressant de placer plus d'une tâche par pièce de travail. Dans ce cas, on peut remplacer les contraintes (3.1) par les contraintes suivantes :

- affecter au plus une tâche par pièce d'un quart de travail.

$$\sum_{t \in T} \sum_{p \in \{p \in P \mid H_t^p \subseteq P_e^k, p \in [F_1^t, F_2^t]\}} X_{e,t}^p \leq 1, \quad \forall k \in K_e, \forall e \in E \quad (3.2)$$

Les contraintes (3.2) indiquent qu'il y ait plus d'une tâche à exécuter dans chaque pièce de travail.

3.3 Utilisation des modèles dans la méthode de deux phases

Cette section présente les résultats concernant la deuxième phase. Des tests ont été réalisés en affectant des activités aux employés avec les tâches fixées dans la phase 1. Il est à rappeler que le but de cette phase est de minimiser les sous-couvertures d'activités en satisfaisant la demande. Deux groupes d'instances (les problèmes d'une journée et les problèmes de plusieurs jours) présentés dans les tableaux 3.1 et 3.2 ont été testés dans cette section. Pour comparer les résultats des tests entre eux, on considère principalement les deux aspects : la minimisation de la sous-couverture et le temps d'exécution.

3.3.1 Les problèmes d'une journée

Premièrement, après avoir modifié les modèles de base en évitant les mauvaises affectations des tâches, les résultats pour les 10 instances du premier groupe sont présentés dans les tableaux 3.9, 3.10 et 3.11. En analysant ces résultats, on voit qu'il y a des changements d'affectation des tâches. Pour la deuxième instance du tableau 3.9 par exemple, la tâche t_1 est affectée maintenant à

l'employé e_{23} (le même employé que celui dans le tableau 3.6), mais à un temps de travail différent (à la période 7). Il reste assez de temps avant cette tâche pour exécuter un autre travail dans ce quart.

Table 3.9: Résultats pour le modèle M_1 après modifications

Instance	Affectation : période ; employé					$\sum s_1^{ap}$	Sous	Obj.	Contr
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5				
1	5 ;8	14 ;16	55 ;43	69 ;44	78 ;20	37	5	-490	2784
2	7 ;23	14 ;46	55 ;48	69 ;37	78 ;2	34	5	-430	2789
3	5 ;34	14 ;12	55 ;23	69 ;4	78 ;46	34	3	-530	2779
4	9 ;3	14 ;47	55 ;51	69 ;41	78 ;45	33	5	-410	2762
5	8 ;37	14 ;16	55 ;38	69 ;28	78 ;33	31	3	-470	2796
6	5 ;10	14 ;1	55 ;47	69 ;20	78 ;14	33	3	-510	2778
7	5 ;31	14 ;13	55 ;28	69 ;6	38 ;48	35	4	-500	2820
8	6 ;25	14 ;14	55 ;40	69 ;18	78 ;46	34	5	-430	2780
9	6 ;34	14 ;33	55 ;17	69 ;47	78 ;2	35	4	-500	2788
10	5 ;26	14 ;48	55 ;9	69 ;41	78 ;28	31	3	-470	2792
Moyenne						33.7	4	-474	2786.8

En comparant ces tableaux avec les tableaux 3.6, 3.7 et 3.8, les valeurs des fonctions objectifs augmentent pour chacun des trois modèles à cause des contraintes (3.2) qu'on a ajoutées. Par ailleurs, les sous-couvertures après la modification sont plus nombreuses. Remarquons que les mauvaises affectations de tâches disparaissent maintenant.

Les résultats numériques, après l'exécution de la méthode de deux phases, sont présentés dans le tableau 3.12. Une minimisation d'une durée de 60 – 120 minutes a été appliquée pour chaque activité. Donc, il y a une durée minimum d'exécution pour chaque activité. Dans le tableau 3.12, $M_1 + Alg.$, $M_2 + Alg.$ et $M_3 + Alg.$ indiquent les résultats finaux obtenus d'affectation des tâches et des

Table 3.10: Résultats pour le modèle M_2 après modifications

Instance	Affec_tâche : période ; employé					Sous	Libre	Obj.	Contr
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5				
1	5;8	14;11	55;15	69;32	78;13	5	37	-270	2668
2	10;24	14;23	55;2	69;49	78;3	5	34	-240	2685
3	5;34	14;12	55;45	69;32	78;30	3	34	-280	2675
4	8;3	14;12	55;35	69;39	78;32	5	33	-230	3617
5	9;30	14;16	55;7	69;48	78;23	3	31	-250	2684
6	5;5	14;33	55;38	69;38	78;14	3	33	-270	2671
7	5;8	14;46	55;11	69;38	38;29	4	35	-270	2662
8	6;3	14;30	55;40	69;51	78;2	5	34	-240	2673
9	6;34	14;33	55;41	69;47	78;2	4	35	-270	2668
10	5;26	14;48	55;5	69;46	78;28	3	31	-250	2657
Moyenne						4	33.7	-257	2766

Table 3.11: Résultats pour le modèle M_3 après modifications

Instance	Affec_tâche : période ; employé					Libre	$\sum r^{ap}$	Sous	Obj.	Contr
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5					
1	5;8	14;11	55;31	69;3	78;38	37	370	5	-4900	3628
2	10;24	14;41	55;2	69;49	78;3	34	340	5	-4300	3645
3	5;34	14;12	55;45	69;32	78;51	34	340	3	-5300	3635
4	8;3	14;47	55;35	69;39	78;32	33	330	5	-4100	3558
5	9;30	14;16	55;36	69;48	78;7	31	310	3	-4700	3644
6	5;5	14;33	55;19	69;20	78;47	33	330	3	-5100	3631
7	5;31	14;4	55;11	69;6	38;29	35	350	4	-5000	3622
8	6;3	14;30	55;40	69;39	78;2	34	340	5	-4300	3633
9	6;34	14;33	55;41	69;47	78;2	35	350	4	-5000	3628
10	5;26	14;33	55;18	69;14	78;9	31	310	3	-4700	3617
Moyenne						33.7	337	4	-4740	3624.1

Table 3.12: Affectation des tâches et des activités (groupe 1)

	$M_1 + Alg.$			$M_2 + Alg.$			$M_3 + Alg.$			<i>inf.%</i>
	temps	Sous	<i>sol%</i>	temps	Sous	<i>sol%</i>	temps	Sous	<i>sol%</i>	
1	195.04	17	0.96	100.14	26	1.47	83.51	21	1.18	0.28
2	40.9	4	0.22	49.18	5	0.28	61.18	9	0.51	0.28
3	42.21	5	0.28	35.54	13	0.73	39.22	5	0.28	0.17
4	174.28	16	0.91	219.92	9	0.51	101.21	8	0.45	0.28
5	38.61	19	1.06	42.81	18	1.01	50.64	18	1.01	0.17
6	69.04	14	0.79	44.91	12	0.68	44.39	12	0.68	0.17
7	74.93	8	0.45	153.85	13	0.73	285.81	16	0.89	0.22
8	29.49	16	0.90	26.2	7	0.39	45.24	7	0.39	0.28
9	32.5	17	0.96	32.61	9	0.51	46.4	17	0.96	0.23
10	155.92	15	0.83	98.07	6	0.34	166.68	4	0.22	0.17
Moy.	85.29	13.1	0.74	80.32	11.8	0.66	92.43	11.5	0.64	0.22

activités aux employés. Les résultats finaux sont comparés selon trois critères : le temps total de résolution (en secondes), la sous-couverture d'activités (*Sous*) et la proportion de sous-couverture au travail total (*sol%*). La dernière colonne du tableau 3.12 donne une borne inférieure sur le travail restant pour chaque instance. Cette borne inférieure est obtenue en prenant le nombre d'heures de travail à faire moins les heures de personnel disponible en pourcentage des heures de personnel disponible. Avec les résultats mentionnés, on constate que le temps d'exécution est assez petit (moins de deux minutes). Conséquemment, la méthode de deux phases est une méthode rapide. D'ailleurs, les pourcentages de sous-couverture sont assez proche du pourcentage inférieur (*inf.%*) pour chaque instance. Par conséquent, les résultats obtenus sont satisfaisants pour le problème dont l'horizon de planification est un jour. Lorsqu'on compare les résultats obtenus dans le tableau 3.12, on constate que le temps de calcul pour $M_3 + Alg.$ est un peu supérieur à ceux des deux autres modèles, mais ce temps, qui est en moyenne 1,5 minute, ne pose pas de problème en pratique. Par contre, ce troisième modèle produit de meilleures solutions la plupart du temps. En moyenne, $M_3 + Alg.$ réduit l'erreur de 13% en passant de 0,74 (%) à 0,64 (%) et c'est celui que nous recommandons.

3.3.2 Les problèmes de plusieurs jours

Dans cette section, un groupe d'instances plus grandes a été testé avec les trois modèles. Ce deuxième groupe d'instances (voir le tableau 3.2) vise à résoudre le problème dont l'horizon de planification est de cinq jours ; de 50 tâches et sept activités doivent être exécutés par 50 employés. Dans un premier temps, les résultats d'un test plus simple, avec seulement trois activités, sont présentés dans les tableaux 3.13 et 3.14.

Table 3.13: Résultats de la phase 1 pour 50 tâches, trois activités

	Sous	M_1			M_2				M_3			
		$\sum s_1^{ap}$	contr	temps	libre	$\sum W_e^p$	contr	temps	libre	$\sum r_1^{ap}$	contr	temps
1	25	77	9991	386	76	223	9969	428	77	228	11412	415
2	10	148	9991	419	148	434	9969	350	146	435	11412	612
3	23	219	9991	581	220	647	9969	579	220	621	11412	731
4	30	167	9991	672	168	479	9969	583	166	480	11412	687
5	0	147	9991	554	147	439	9969	483	147	429	11412	413
Moy.	17.6	151.6	9991	522.4	151.8	444.4	9969	484.6	151.2	438.6	11412	571.6

Dans le tableau 3.13, la signification des colonnes est identique à celle du tableau 3.13. Les valeurs de $\sum s_1^{ap}$, *libre*, et $\sum r_1^{ap}$ changent peu entre les trois modèles, parce qu'il y a peu d'activités pour ces instances. Il est à rappeler que l'objectif du modèle M_1 est de répartir les sous-couvertures d'activités telles qu'on préfère plusieurs fois une personne en sous-couverture qu'une fois plusieurs personnes. Toutefois, les qualifications des employés sont considérées par le modèle M_2 . Lorsqu'on n'a pas beaucoup d'activités à affecter pour ces instances, l'idée du modèle de répartir des sur-couvertures entre les périodes et les activités ne fonctionne pas très bien.

Les résultats du tableau 3.14 décrivent l'affectation des activités en phase 2. Les colonnes sont

pareilles à celles du tableau 3.12.

Table 3.14: Résultats de la phase 2 pour 50 tâches et trois activités

	$M_1 + Alg.$			$M_2 + Alg.$			$M_3 + Alg.$			<i>inf.</i>
	temps	Sous	<i>sol%</i>	temps	Sous	<i>sol%</i>	temps	Sous	<i>sol%</i>	
1	593	84	1.06	520	57	1.16	491	57	1.14	0
2	544	122	1.53	417	120	1.75	948	129	1.60	0
3	646	136	2.35	645	144	2.44	813	134	2.21	0
4	809	116	1.85	721	121	1.90	778	128	1.83	0
5	610	117	1.56	558	124	1.47	502	120	1.54	0
Moy.	640.3	129.8	1.67	572.4	135.6	1.74	706.3	129.2	1.66	0

En comparant les données du tableau 3.14 avec celles du tableau 3.12, on obtient des résultats de moindre qualité pour les instances du deuxième groupe. Le troisième modèle M_3 est majoritairement le meilleur parmi les trois modèles, mais les différences ne sont pas très importantes. Ceci peut s'expliquer par la diminution du nombre d'activités. Lorsqu'il y a peu d'activités à exécuter, la méthode de la répartition entre les activités et les périodes n'est plus efficace. En conséquence, pour le problème avec peu d'activités, il est presque identique d'utiliser chacun des trois modèles. Pour mieux comparer les modèles, nous revenons aux instances originales avec sept activités. Les résultats numériques pour les instances de sept activités et de 50 tâches sont présentés dans les tableaux 3.15 et 3.16.

Comme on peut le constater dans le tableau 3.15, les valeurs des sous-couvertures d'activités (*Sous*) pour les trois modèles sont identiques. D'ailleurs, les critères pour comparer les modèles sont : le premier morceau de répartition d'activités ($\sum s_1^{ap}$), le nombre de périodes d'inactivité (*libre*), le nombre total de qualifications des employés libres ($\sum W_e^p$), le premier morceau de ré-

Table 3.15: Résultats des trois modèles (groupe 2)

	Sous	M_1			M_2				M_3			
		$\sum s_1^{ap}$	contr	temps	libre	$\sum W_e^p$	contr	temps	Libre	$\sum r_1^{ap}$	contr	temps
1	5	83	11903	81	83	332	11841	77	83	581	15204	117
2	15	232	11901	72	232	928	11839	71	232	1421	15202	103
3	9	255	11888	89	255	1020	11826	86	255	1603	15189	98
4	17	184	11895	68	184	736	11833	67	183	1225	15196	84
5	14	179	11901	83	179	716	11839	88	179	1246	15202	97
6	13	189	11901	78	189	756	11839	82	189	1225	15202	91
7	11	213	11893	79	213	852	11829	77	212	1414	15192	86
Moy.	12	190.7	11897	78.6	190.7	762.8	11835	78.3	190.4	1245	15198	96.6

partition de $\sum W_e^p$ entre les périodes et les activités ($\sum r_1^{ap}$), le nombre de contraintes (*contr*) et le temps de résolution (*temps*). Pour ces instances, le nombre moyen de qualifications que possède chaque employé est de quatre. Le tableau 3.16 représente les résultats finaux après la deuxième phase.

Table 3.16: Affectation des tâches et des activités (groupe 2)

	$M_1 + Alg.$			$M_2 + Alg.$			$M_3 + Alg.$			<i>inf.</i>
	temps	Sous	<i>sol%</i>	temps	Sous	<i>sol%</i>	temps	Sous	<i>sol%</i>	
1	342	75	0.06	314	74	0.06	385	72	0.06	0
2	191	164	0.14	204	169	0.15	217	158	0.13	0
3	214	168	0.15	239	162	0.14	226	159	0.14	0
4	296	133	0.11	288	144	0.12	249	137	0.12	0
5	301	126	0.11	252	132	0.11	263	128	0.11	0
6	237	129	0.11	213	131	0.11	220	127	0.11	0
7	354	148	0.13	463	142	0.12	493	130	0.11	0
Moy.	276.4	134.7	0.12	281.8	136.3	0.12	293.3	130.1	0.11	0

Les instances du deuxième groupe sont bien résolues avec les trois modèles. En analysant les résultats du tableau 3.16, nous constatons que les écarts entre les solutions avec les deux phases et la borne inférieure (*inf.*) sont entre 0,11 (%) et 0,12 (%). Ces écarts sont petits, mais avec le

modèle M_3 on réduit l'erreur de 8% en passant de 0,12 (%) à 0,11 (%). Le temps de calcul pour $M_3 + Alg.$ (environ 4,8 minutes) est un peu supérieur à ceux des autres deux modèles, mais ce temps est acceptable en pratique. Par contre, le troisième modèle fournit de meilleures solutions la plupart du temps.

Ainsi, l'efficacité de la méthode de deux phases est évaluée en résolvant les deux groupes d'instances. L'analyse des performances considère toujours les deux paramètres : le nombre de sous-couvertures et le temps de calcul. D'après les résultats mentionnés dans les tableaux 3.12 et 3.16, le problème d'affectation des activités et des tâches est bien résolu avec la méthode de deux phases. On peut conclure qu'il reste une proportion assez petite (moins de 1% de la sous-couverture d'activités) pour chacun des deux groupes d'instances. D'ailleurs, le temps de calcul est court (moins de cinq minutes), ce qui indique que la méthode de deux phases est une méthode rapide et efficace.

CONCLUSION

Ce projet de maîtrise a porté sur le problème d'affectation des tâches et des activités aux employés. Ce problème appartient à la catégorie des problèmes d'attribution des activités aux employés. Le problème étudié est difficile car la taille des problèmes pratiques est très grande. D'autre part, le problème est beaucoup plus compliqué en traitant simultanément des tâches et des activités.

Nous avons proposé une méthode de deux phases pour résoudre ce problème. Pour la première phase de pré-affectation des tâches aux employés, nous avons présenté trois modèles de base. L'idée du premier modèle est de répartir la sur-couverture d'activités en trois morceaux, on préfère plusieurs fois une personne en surplus qu'une fois plusieurs personnes. Pour le deuxième modèle, on veut garder des employés inactifs ayant le plus possible de qualifications. Enfin le troisième modèle, en combinant les idées du premier et du deuxième modèles, répartit les qualifications des employés inactifs entre les périodes et les activités.

Certaines extensions ont été proposées pour les trois modèles de base. Nous avons considéré la situation où plusieurs employés sont requis pour chaque tâche, les tâches avec des contraintes de précédence et les tâches réalisées par une équipe.

Deux groupes d'expériences numériques ont été réalisés sur le problème d'horaires du personnel. Le pré-traitement des tâches est proposé afin d'éviter les mauvaises affectations des tâches. Ce problème a été résolu rapidement à l'aide de nos trois modèles. Le temps total pour les deux phases est moins de deux minutes pour l'horizon d'un jour, de 50 tâches et de 10 activités ; moins de cinq minutes pour l'horizon de cinq jours, de 50 tâches et de sept activités. Les distances inférieures des solutions globales sont entre 0,11% et 0,74%. Ces résultats confirment la capacité de notre ap-

proche de résolution de produire des solutions de très bonnes qualités. Parmi les trois modèles, le modèle M_3 nous a donné les meilleures solutions la plupart de temps. Par contre, lorsqu'il y a peu d'activités à considérer, les écarts entre les solutions des trois modèles sont petits.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AYKIN, T. (1996). Optimal Shift Scheduling with Multiple Break Windows, *Management Science*, 42, 591-602.
- [2] AYKIN, T. (1998). A Composite Branch and Cut Algorithm for Optimal Shift Scheduling with Multiple Breaks and Break Windows, *Journal of the Operational Research Society*, 49, 603-615.
- [3] AYKIN, T. (2000). A Comparative Evaluation of Modeling Approaches to the Labor Shift Scheduling Problem, *Journal of Operational Research*, 125, 381-397.
- [4] BECHTOLD, S.E. et JACOBS, L.W. (1990). Implicit Modeling of Flexible Break Assignments in Optimal Shift Scheduling, *Management Science*, 36, 1339-1351.
- [5] BECHTOLD, S.E. et JACOBS, L.W. (1996). The Equivalence of General Set-covering and Implicit Integer Programming Formulations for Shift Scheduling, *Naval Research Logistics*, 43, 233-249.
- [6] BOUCHARD, M. (2004). *Optimisation des pauses dans le problème de fabrication d'horaires avec quarts de travail*, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Canada.
- [7] CHEANG, B., LI, H., LIM A., et RODRIGUES, B. (2003). Nurse Rostering Problems – A Bibliographic Survey, *European Journal of Operational Research*, 151(3), 447-460.
- [8] COROMINAS, A., PASTOR, R. et RODRIGUEZ, E. (2006). Rotational Allocation of Tasks to Multifunctional Workers in a Service Industry, *International Journal of Production Economics*, 103(1), 3-10.

- [9] DANTZIG, G.B. (1954). A Comment on Edie's Traffic Delays at Toll Booths, *Operations Research*, 2, 339-341.
- [10] EMMONS, H. et BURNS, R.N. (1991). Off-day Scheduling with Hierarchical Worker Categories, *Operations Research*, 39, 484-496.
- [11] HAASE, K. (1999). Retail Business Staff Scheduling under Complex Labor Regulations, *Manuskripte aus den Instituten für Betriebswirtschaftslehre der Universität Kiel Nr.*, 511, Kiel, Allemagne.
- [12] JARRAH, A.I.Z., BARD, J.F. et DESILVA, A.H. (1994). Solving Large-Scale Tour Scheduling Problems, *Management Science*, 40, 1124-1144.
- [13] MACULAN, N., PORTO, S.C.S., RIBEIRO, C.C. et SOUZA, C.C. (1999). A New Formulation for Scheduling Unrelated Processors under Precedence Constraints, *RAIRO Operations Research*, 33, 87-92.
- [14] OMARI, Z. (2002). *Attribution des activités aux employés travaillant sur des quarts*, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Canada.
- [15] PORTO, S.C.S. et RIBEIRO, C.C. (1995). A Tabu Search Approach to Task Scheduling on Heterogeneous Processors under Precedence Constraints, *International Journal of High Speed Computing*, 7(1), 45-73.
- [16] PORTO, S.C.S., PAULO, J., KITAJIMA, F.W. et RIBEIRO, C.C. (2000). Performance Evaluation of a Parallel Tabu Search Task Scheduling Algorithm, *Parallel Computing*, 26, 73-90.
- [17] WHITE, C.A. et WHITE, G.M. (2003). Scheduling Doctors for Clinical Training Unit Rounds Using Tabu Optimization, *Lecture Notes in Computer Science*, 2740, 120-129.